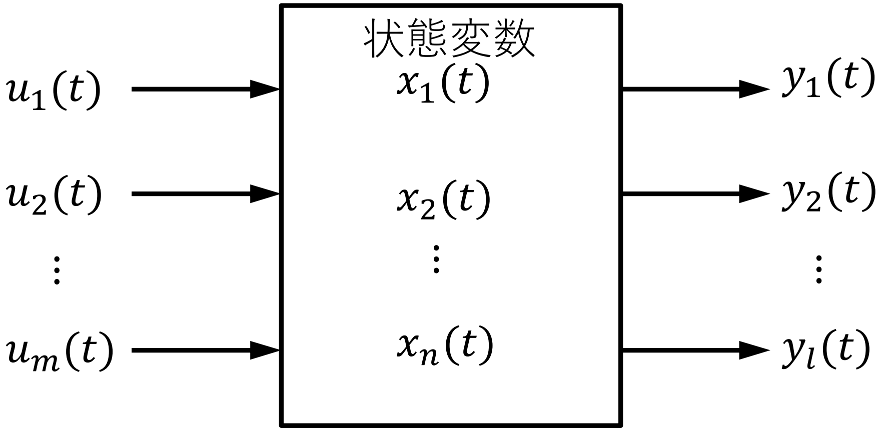
制御（44）　　《現代制御理論：状態方程式》

制御システム



入力変数ベクトル　　状態変数ベクトル　　出力変数ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{bmatrix}$$

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ ・・・状態方程式

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$　又は　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ ・・・出力方程式

- $\dot{\boldsymbol{x}}$は、$\boldsymbol{x}$の微分
- $\boldsymbol{A}$は、n×n次元の行列関数
- $\boldsymbol{B}$は、n×m次元の行列関数
- $\boldsymbol{C}$は、l×n次元の行列関数
- $\boldsymbol{D}$は、l×m次元の行列関数

制御（45）　　《現代制御理論：可制御性、可観測性》

可制御とは…　入力を操作することで、制御システム内部を、任意の望む状態へ移行できること。

可観測とは…　出力を観測することで、制御システム内部状態を、完全に知ることができること。

$$\boldsymbol{U_c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A^2B} & \cdots & \boldsymbol{A^{n-1}B} \end{bmatrix}$$ ・・・可制御性行列

$\boldsymbol{U_c}$ のランクが$\boldsymbol{n}$であると可制御である。

$$\boldsymbol{U_o} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA^{n-1}} \end{bmatrix}$$ ・・・可観測性行列

$\boldsymbol{U_o}$ のランクが$\boldsymbol{n}$であると可観測である。

行列のランク（階数）とは、
行列の基本変形を繰り返し、
零ベクトルにならずに残った
行（列）ベクトルの個数

＜行列の基本変形＞
・２つの行（列）を入れ替える
・１つの行（列）を定数倍（≠0）する。
・ １つの行（列）に他の行（列）の定数倍（≠0）を加える。

制御（44）補足　　《特性方程式》

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ で状態方程式を表せるとき、

$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ が特性方程式となり、古典制御理論と同様に安定性を論じることができる。※$\boldsymbol{I}$は単位行列

すなわち、特性方程の根の実部が全て負であれば安定、　１つでも正があれば不安定となる。

例）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の特性方程式を求める。

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ 1 & s+3 & -1 \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ 1 & s+3 & -1 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s(s+3)^2 + 0 + 1 - (0 + 0 - s) = s^3 + 6s^2 + 10s + 1$$

制御（45）補足　《現代制御理論：計算例》

例）以下のシステムの可制御性、可観測性を調べる。

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$　　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$　　$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　　$\boldsymbol{C} = [-1 \quad -1]$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{A}$（n×n次元）なので、n= 2である。

可制御性行列　$\boldsymbol{U_c} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$　　※$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$より

可観測性行列　$\boldsymbol{U_o} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$　　※$\boldsymbol{CA} = [-1 \quad -1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = [3 \quad 3]$より

$\boldsymbol{U_c}$を基本変形すると、$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$となるので、rank $\boldsymbol{U_c} = 2$　　∴rank $\boldsymbol{U_c} = \mathrm{n}$ なので、可制御

$\boldsymbol{U_o}$を基本変形すると、$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$となるので、rank $\boldsymbol{U_o} = 1$　　∴rank $\boldsymbol{U_c} \neq \mathrm{n}$ なので、不可観測