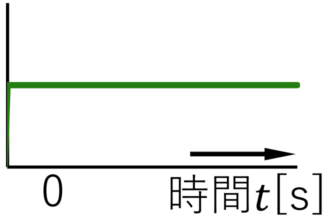
制御（36）　《周波数応答》

■伝達関数：$G(s)$

ステップ入力、
ランプ入力、
パラボラ入力、
等

入力　$x(t)$

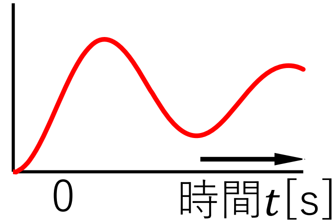


ラプラス変換

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) = G(s)X(s)$$

ラプラス逆変換

出力　$y(t)$

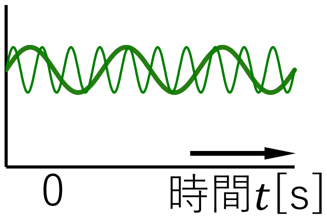


【過渡応答、定常応答】

■伝達関数：$G(s)$

正弦波入力

入力　$A_i \sin \omega t$

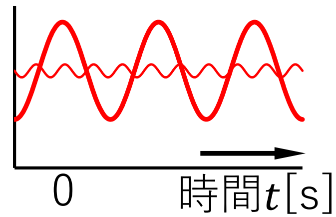


ラプラス変換

$$\frac{A_i \omega}{s^2 + \omega^2} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \frac{A_i \omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

ラプラス逆変換

出力　$A_o \sin(\omega t + \varphi)$



【周波数応答】

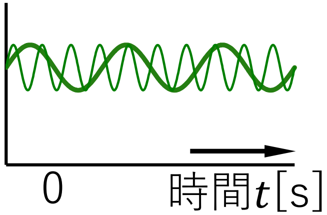
※周波数応答とは、角周波数ω[rad/s]を変化させたときの、$\dfrac{A_o}{A_i}$：振幅比　φ：位相　の変化を表す特性

制御（37）　《周波数伝達関数》

■伝達関数：$G(s)$

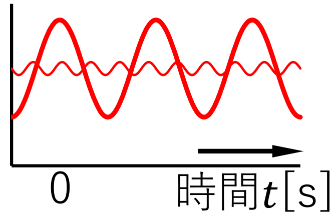
正弦波入力

入力 $A_i \sin \omega t$ --ラプラス変換--> $\dfrac{A_i\omega}{s^2+\omega^2}$



$$X(s) = \frac{A_i\omega}{s^2+\omega^2} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) = G(s)X(s) = \frac{A_i\omega}{s^2+\omega^2}G(s)$$

ラプラス逆変換 --> 出力 $A_o \sin(\omega t + \varphi)$



$s \Rightarrow j\omega$ に置き換える

（ラプラス変換⇒フーリエ変換に相当）

■周波数伝達関数：$G(j\omega)$

入力 $\mathrm{Im}\left(A_i e^{j\omega t}\right)$

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{G(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) = G(j\omega)X(j\omega)$$

出力 $\mathrm{Im}\left(A_o\, e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$

※ Imは複素数の虚部を示す

$$G(j\omega) = A + jB$$

周波数応答：　振幅比 $\dfrac{A_o}{A_i} = |G(j\omega)| = \sqrt{A^2+B^2}$　　位相 $\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{B}{A}$ [°]

※$|G(j\omega)|$を利得と言う。　　※$\varphi > 0$：進相、$\varphi < 0$：遅相、$\varphi = 0$：同相

→利得・位相はωの式となり、その特性の描き方には、様々な方法がある。

制御（38）　《ボード線図（周波数応答線図）》

利得$|G(j\omega)|$の常用対数を20倍した値が、ゲイン　$g_{\mathrm{db}} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ [単位：dB]

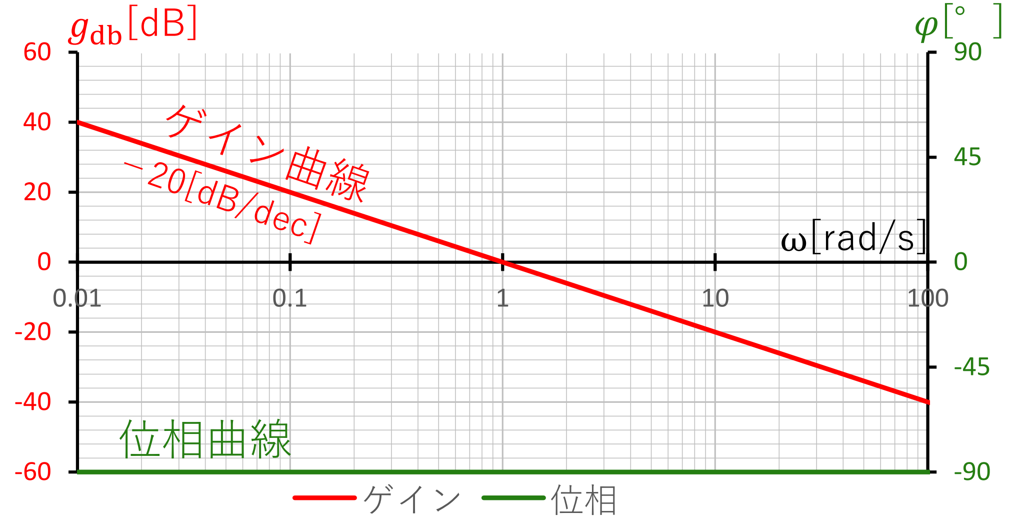
ωを横軸（対数目盛）として、ゲインg_{db} 及び位相φをグラフに表したものがボード線図

■積分要素　$G(s) = \dfrac{1}{s}$

周波数伝達関数：$G(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega} = 0 - j\dfrac{1}{\omega}$

$$g_{\mathrm{db}} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{1}{\omega} = -20\log_{10}\omega \ \text{[dB]}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{-\frac{1}{\omega}}{0} = -90\ [°]$$

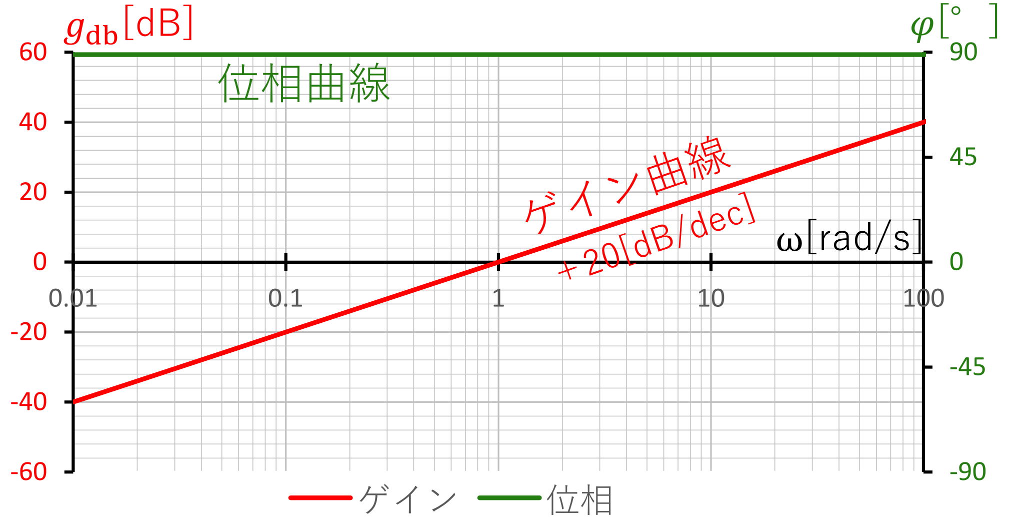


■微分要素　$G(s) = s$

周波数伝達関数：$G(j\omega) = j\omega = 0 + j\omega$

$$g_{\mathrm{db}} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\omega \ \text{[dB]}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{0} = 90\ [°]$$



制御（39）　《ボード線図（一次遅れ要素）》

■一次遅れ要素　$G(s)=\dfrac{1}{1+Ts}$　　周波数伝達関数：$G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}=\dfrac{1}{1+\omega^2T^2}(1-j\omega T)$

$$g_{\mathrm{db}}=20\log_{10}|G(j\omega)|=20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}=20\log_{10}1-20\log_{10}\left(1+\omega^2T^2\right)^{\frac{1}{2}}=-10\log_{10}\left(1+\omega^2T^2\right)$$

$$\varphi=\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{-\omega T}{1}=-\tan^{-1}(\omega T)$$

$\therefore\ g_{\mathrm{db}}=-10\log_{10}\left(1+\omega^2T^2\right)$ [dB]

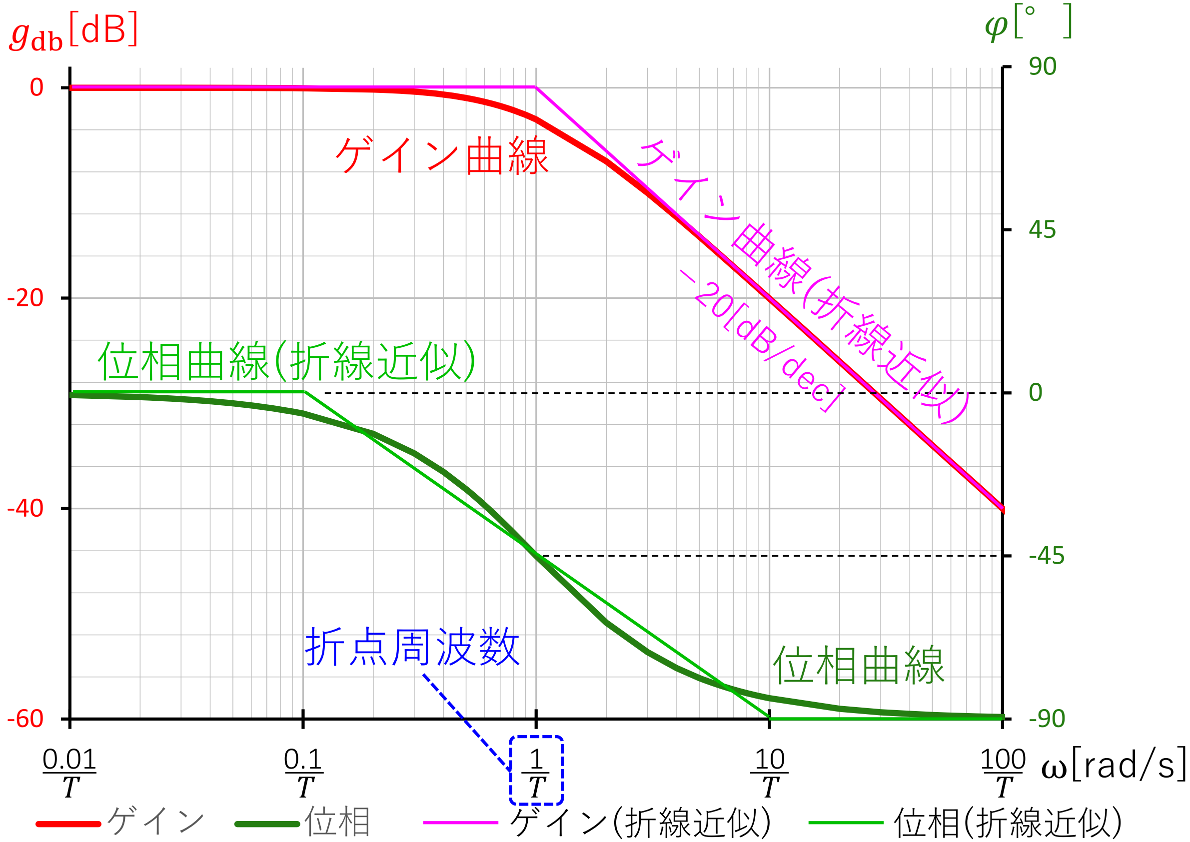
$\therefore\ \varphi=-\tan^{-1}(\omega T)$ [°]

折線近似

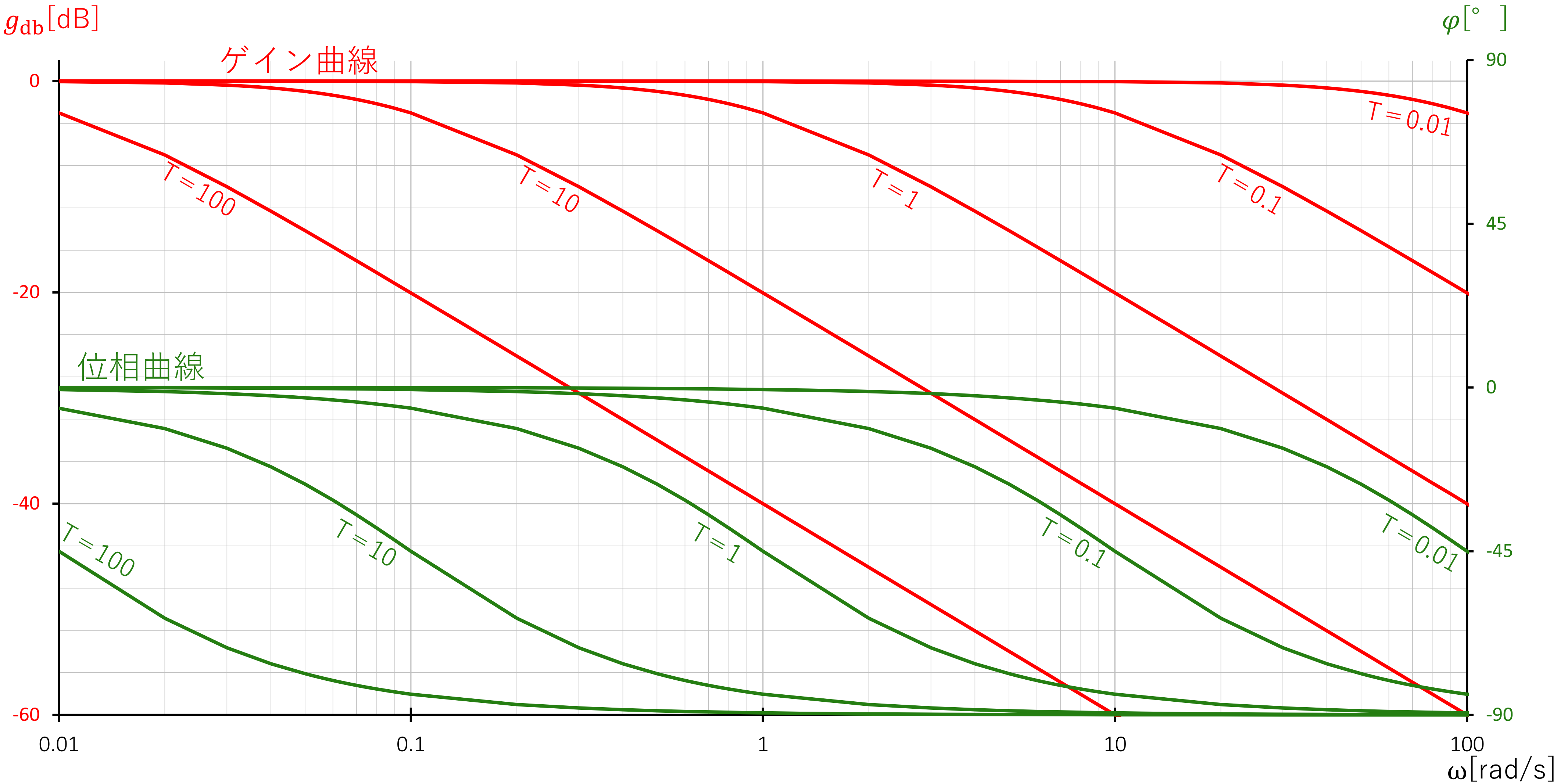
$\omega\ll\dfrac{1}{T}$のとき、$g_{\mathrm{db}}\fallingdotseq-10\log 1=0$　　$\varphi\fallingdotseq 0$

$\omega=\dfrac{1}{T}$のとき、$g_{\mathrm{db}}=-10\log 2\fallingdotseq 0$　　$\varphi=-45$

$\omega\gg\dfrac{1}{T}$のとき、$g_{\mathrm{db}}\fallingdotseq-20\log\omega T$　　$\varphi\fallingdotseq-90$

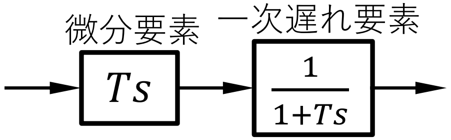


制御（39）：補足　《ボード線図（一次遅れ要素）》



制御（39）：付録　《ボード線図（一次微分要素）》

■一次微分要素 $G(s)=\dfrac{Ts}{1+Ts}$　周波数伝達関数：$G(j\omega)=\dfrac{j\omega T}{1+j\omega T}$

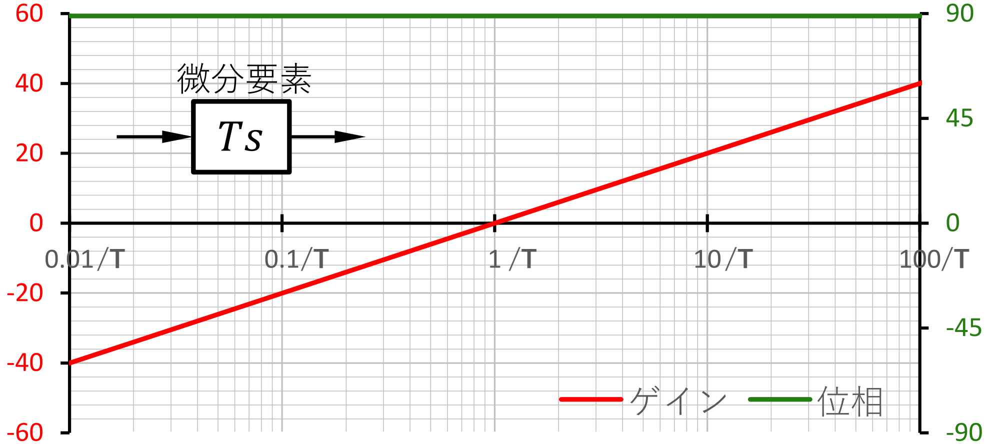


※ボード線図は各伝達要素の足し合わせで表せる。

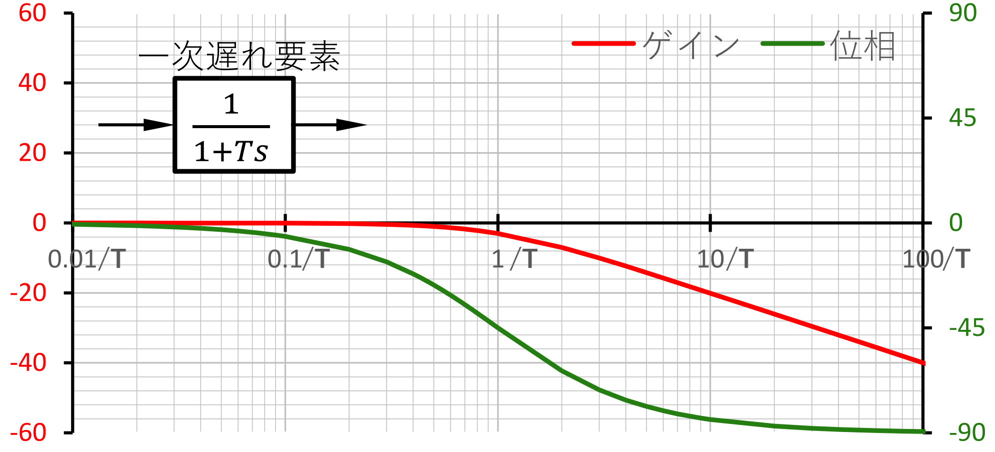
$$g_{\mathrm{db}}=20\log_{10}\left|\frac{j\omega T}{1+j\omega T}\right|=\underbrace{20\log_{10}|j\omega T|}_{\text{微分要素のゲイン}}+\underbrace{20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|}_{\text{一次遅れ要素のゲイン}}$$

$$\varphi=\angle G\left(\frac{j\omega T}{1+j\omega T}\right)=\underbrace{\tan^{-1}j\omega T}_{\text{微分要素の位相}}+\underbrace{\tan^{-1}\frac{1}{1+j\omega T}}_{\text{一次遅れ要素の位相}}$$

①微分要素のボード線図



②一次遅れ要素のボード線図



③一次微分要素のボード線図＝①微分＋②一次遅れ