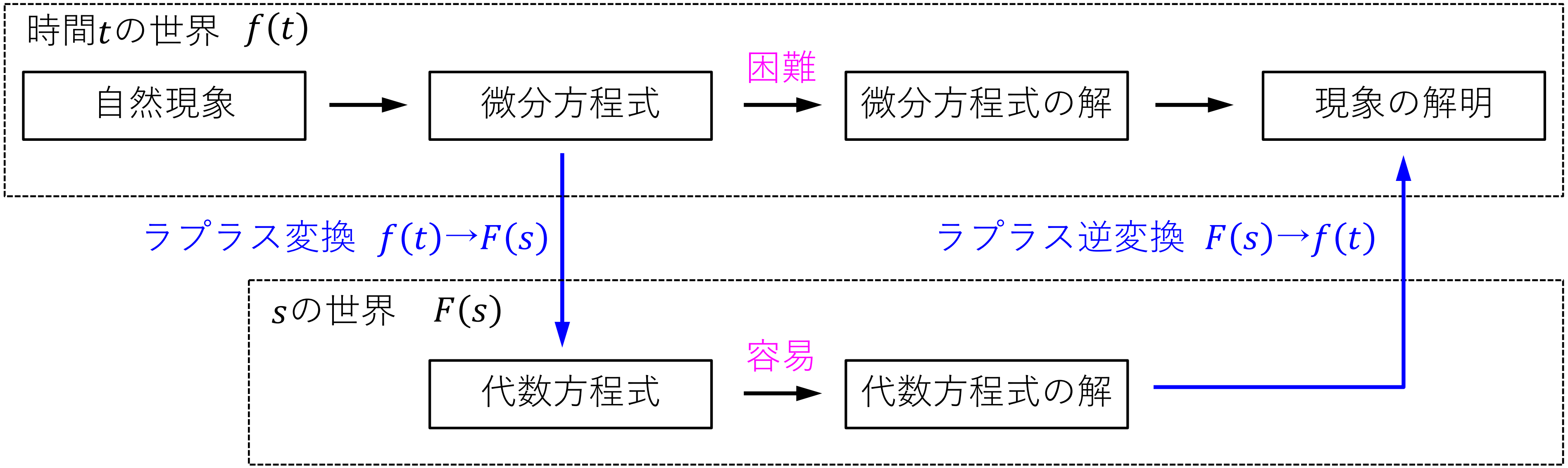
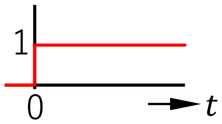
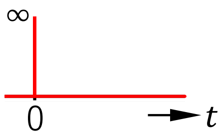
制御（１）　《ラプラス変換の目的》



ラプラス順変換　$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$　→　$\mathcal{L} f(t) = F(s)$

ラプラス逆変換　$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} ds$　→　$\mathcal{L}^{-1} F(s) = f(t)$

制御（２）　《ラプラス変換表》

$f(t)$	$F(s)$
K（定数）	$\dfrac{K}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$u(t)$  { 0（t<0）, 1（t≧0）}	$\dfrac{1}{s}$ ※ステップ入力
$\delta(t)$  { 0（t ≠ 0), $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt=1$ }	1 ※インパルス入力

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{\pm at}$	$\dfrac{1}{s \mp a}$
$\sin\ (\omega t+\theta)$	$\dfrac{\omega \cos\theta + s \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos\ (\omega t+\theta)$	$\dfrac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$te^{\pm at}$	$\dfrac{1}{(s \mp a)^2}$
$\int f(\tau)\, g(t-\tau) d\tau$	$F(s)\ G(s)$

制御（3）　　《ラプラス変換の定理》

※ $f^{-1}(t) = \int f(t)dt$、$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$を意味する。

線形定理　$\mathcal{L}af(t) = aF(s)$　　$\mathcal{L}\big(f(t) + g(t)\big) = F(s) + G(s)$

微分定理　$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$　　$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

積分定理　$\mathcal{L}\left(\int f(t)dt\right) = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$　　$\mathcal{L}\left(\iint f(t)dt^2\right) = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^2} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s}$

s推移定理　$\mathcal{L}\left(e^{\mp at}f(t)\right) = F(s \pm a)$　　t推移定理　$\mathcal{L}f(t \pm a) = e^{\pm as}F(s)$

最終値の定理　$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$　　初期値の定理　$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

相似定理　$\mathcal{L}f(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

制御（補足）　《ラプラス逆変換例》

$F(s)\ =\dfrac{1}{s(s+1)}$ を時間関数$f(t)$に戻す。 ラプラス変換表が使える形に変形するため、部分分数分解を行う。

$F(s)=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+1}$ と置く。　　A,Bを計算すると、　　$A=\left[\dfrac{1}{s+1}\right]_{S=0}=1$　　$B=\left[\dfrac{1}{s}\right]_{s=-1}=-1$

A,Bを代入し、 $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}$

線形定理　$\mathcal{L}\big(f(t)+g(t)\big)=F(s)+G(s)$

ラプラス変換表が使える形になったので、

$f(t)$	$F(s)$
1（定数） ←	$\dfrac{1}{s}$
e^{-at} ←	$\dfrac{1}{s+a}$

逆ラプラス変換をすると、　$\mathcal{L}^{-1}\,F(s)=1-e^{-t}$

$\therefore\quad f(t)=1-e^{-t}$

制御（補足）　《部分分数分解1》

$$Q(s) = \frac{E}{R}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{CR}\right)}$$ を時間関数$q(t)$に戻すために、ラプラス変換表が使える形に変形する。

$$Q(s) = \frac{E}{R}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{CR}}\right)$$ と置く。 A,Bを計算すると、

$$A = \left[\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right]_{S=0} = CR \qquad B = \left[\frac{1}{s}\right]_{s=-\frac{1}{CR}} = -CR$$

次ページ参照

A,Bを代入し、 $$Q(s) = \frac{E}{R}\left(\frac{CR}{s}+\frac{-CR}{s+\frac{1}{CR}}\right) = CE\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right)$$ と、ラプラス変換表が使える形になる。

逆ラプラス変換をすると、 $$\mathcal{L}^{-1}Q(s) = CE\left(1-e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$$

$$\therefore \quad q(t) = CE\left(1-e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$$

制御（補足）　《部分分数分解2》

$\dfrac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{CR}\right)}$ の分母のsの項を分解して、分子を未知数A,Bと置く。　$\dfrac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{CR}\right)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+\dfrac{1}{CR}}$

①（Aが分子である分数の分母）＝0となる、sの値を求める。 $\therefore\ s=0$

②（Bが分子である分数）の分子を1とした分数に、①のsの値を代入した値がAとなる。

$\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{CR}}$ に $s=0$ を代入して、 $A=\dfrac{1}{0+\dfrac{1}{CR}}=CR$ 　$\therefore\ A=CR$

$$\boxed{A=\left[\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right]_{S=0}=CR \quad \text{と書く}}$$

③（Bが分子である分数の分母）＝0となる、sの値を求める。 $s+\dfrac{1}{CR}=0$ $\therefore\ s=-\dfrac{1}{CR}$

④（Aが分子である分数）の分子を1とした分数に、③のsの値を代入した値がBとなる。

$\dfrac{1}{s}$ に $s=-\dfrac{1}{CR}$ を代入して、 $B=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{CR}}=-CR$ 　$\therefore\ B=-CR$

$$\boxed{B=\left[\frac{1}{s}\right]_{S=-\frac{1}{CR}}=-CR \quad \text{と書く}}$$

A,Bを代入して、 $\dfrac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{CR}\right)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+\dfrac{1}{CR}}=\dfrac{CR}{s}+\dfrac{-CR}{s+\dfrac{1}{CR}}=CR\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{CR}}\right)$ と変形できる。

制御（補足）　《部分分数分解3》

【部分分数分解の考え方】

CASE1）
※重根なし

$$\frac{cx+d}{(x+a)(x+b)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}\ \cdots ①$$

①の両辺に$(x+a)(x+b)$を掛けると、 $cx+d=A(x+b)+B(x+a)$

$x=-a$ より　$A=\left[\dfrac{cx+d}{x+b}\right]_{x=-a}$　　　$x=-b$ より　$B=\left[\dfrac{cx+d}{x+a}\right]_{x=-b}$

CASE2）
※重根あり

$$\frac{bx+c}{(x+a)^2}=\frac{A}{(x+a)^2}+\frac{B}{x+a}\cdots ②$$

②の両辺に $(x+a)^2$を掛けて、x=－aを代入すると、 $A=[bx+c]_{x=-a}$

②の両辺に$x+a$を掛けて、x=－aを代入すると、　$B=\left[\dfrac{bx+c}{x+a}-\dfrac{A}{x+a}\right]_{x=-a}$