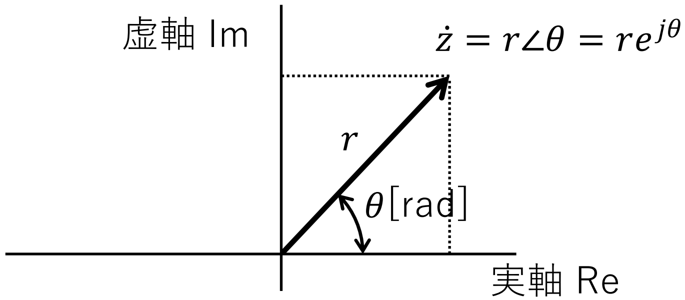
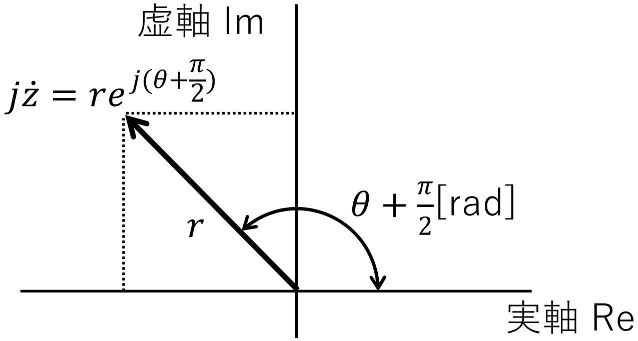
フェーザ表示（5）　－虚数 j の意味

虚数 $j=\sqrt{-1}$　、$j^2=-1$



$\dot{z}$にjをかける ⇩ $j\dot{z}=re^{j\theta}e^{j\frac{\pi}{2}}=re^{j(\theta+\frac{\pi}{2})}$



$$e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=0+j\cdot 1=j$$

オイラーの公式
$$\boxed{e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta}$$

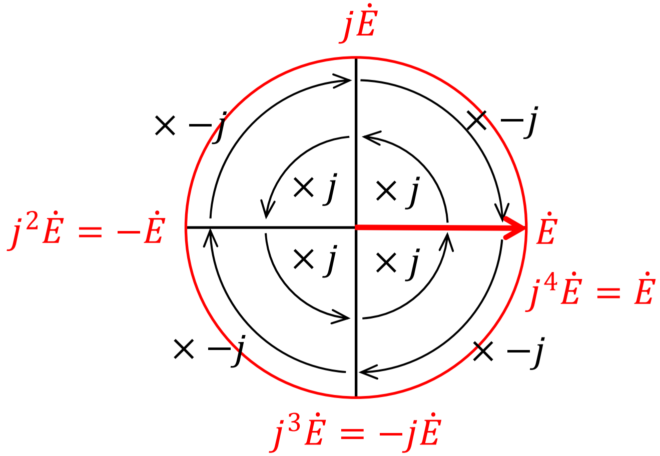
$$e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0+j\cdot -1=-j$$

$e^{j\theta}$にjを掛ける　：　$je^{j\theta}=e^{j\theta}e^{j\frac{\pi}{2}}=e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$e^{j\theta}$に$-j$を掛ける：$-je^{j\theta}=e^{j\theta}e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})}$

（jで割る）

$$\frac{1}{j}=\frac{-1\times -1}{j}=\frac{-1\times j^2}{j}=-j$$



jを掛けると
位相が$\frac{\pi}{2}$[rad]進む。

$-j$を掛けると（jで割ると）
位相が$\frac{\pi}{2}$[rad]遅れる。

フェーザ表示（６） －フェーザの微積分

原関数： $a(t) = sin(\omega t + \theta)$ 　　$a(t)$のフェーザを$\dot{A}$とすると、$\dot{A} = e^{j\theta}$

三角関数の変形

$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$-\cos\theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

【微分】

原関数の微分：$\frac{d}{dt}a(t) = \frac{d}{dt}\sin(\omega t + \theta) = \omega\cos(\omega t + \theta) = \omega\sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)$

原関数の微分は、
フェーザの$j\omega$倍に対応

$$\frac{d}{dt}a(t) = \omega\sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{フェーザ表示}} \omega e^{j\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \omega e^{j\theta}\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{e^{j\frac{\pi}{2}} = j} = j\omega\underbrace{e^{j\theta}}_{\dot{A} = e^{j\theta}} = j\omega\dot{A}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\dot{A} = j\omega\dot{A}$$

【積分】

原関数の積分：$\int a(t)dt = \int sin(\omega t + \theta)dt = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$

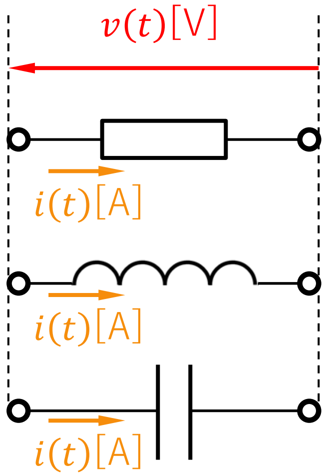
原関数の積分は、
フェーザの$\frac{1}{j\omega}$倍に対応

$$\int a(t)dt = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{フェーザ表示}} \frac{1}{\omega}e^{j\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\omega}e^{j\theta}\underbrace{e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}_{e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -j = \frac{1}{j}} = \frac{1}{j\omega}\underbrace{\omega e^{j\theta}}_{\dot{A} = e^{j\theta}} = \frac{1}{j\omega}\dot{A}$$

$$\therefore \int \dot{A}dt = \frac{1}{j\omega}\dot{A}$$

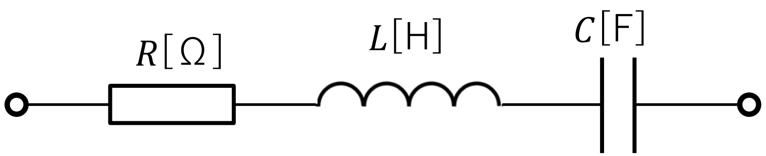
フェーザ表示（7）　－インピーダンスのフェーザ表示

オームの法則（フェーザ表示）：　$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I}$　　　$\dot{V}$：電圧[V]　　$\dot{I}$：電流[A]　　$\dot{Z}$：インピーダンス［Ω］



	原関数		フェーザ		インピーダンス
抵抗：R[Ω]	$v(t) = Ri(t)$	⇒	$\dot{V} = \boxed{R} \cdot \dot{I}$	⇒	R　[Ω]
コイル：L[H]	$v(t) = L\dfrac{i(t)}{dt}$	⇒	$\dot{V} = L \cdot j\omega\dot{I} = \boxed{j\omega L} \cdot \dot{I}$	⇒	$j\omega L$　[Ω]
コンデンサ：C[F]	$v(t) = \displaystyle\int \frac{1}{C} i(t)dt$	⇒	$\dot{V} = \dfrac{1}{C} \cdot \dfrac{\dot{I}}{j\omega} = \boxed{\dfrac{1}{j\omega C}} \cdot \dot{I}$	⇒	$\dfrac{1}{j\omega C}$　[Ω]

インピーダンスの単位は全て[Ω]であることに注意！



直接接続の合成インピーダンスは、

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$