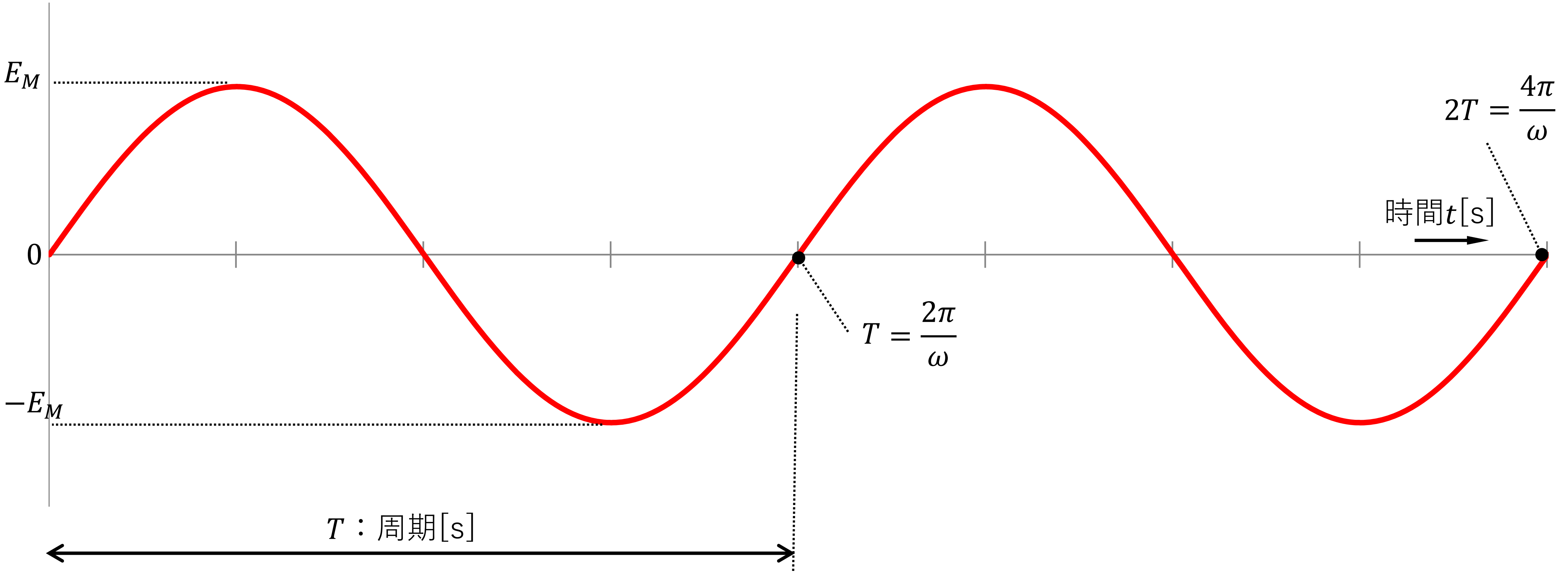
フーリエ級数 《高調波》

度数法　弧度法

交流電圧[V]：$e(t) = E_M \sin\omega t$ （$E_M$：瞬時最大電圧、$\omega$：角周波数[rad/s]）

円の１周： $360[°] = 2\pi[\mathrm{rad}]$

$\omega t = 2\pi[\mathrm{rad}]$で1周期なので、1周期に必要な時間は、$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ [s]と表せます。　周波数$f$[Hz]は $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$



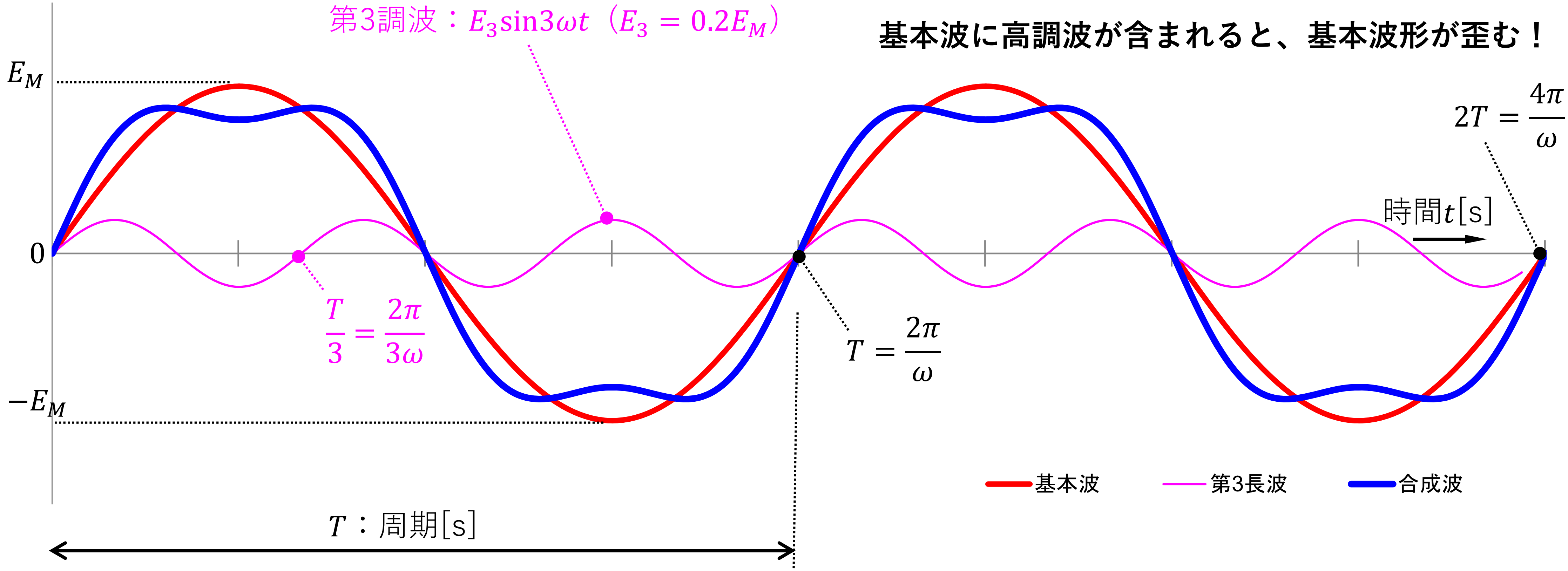
フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin\omega t$　　第 n 調波：$E_M \sin n\omega t$

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

**基本波に高調波が含まれると、基本波形が歪む！**

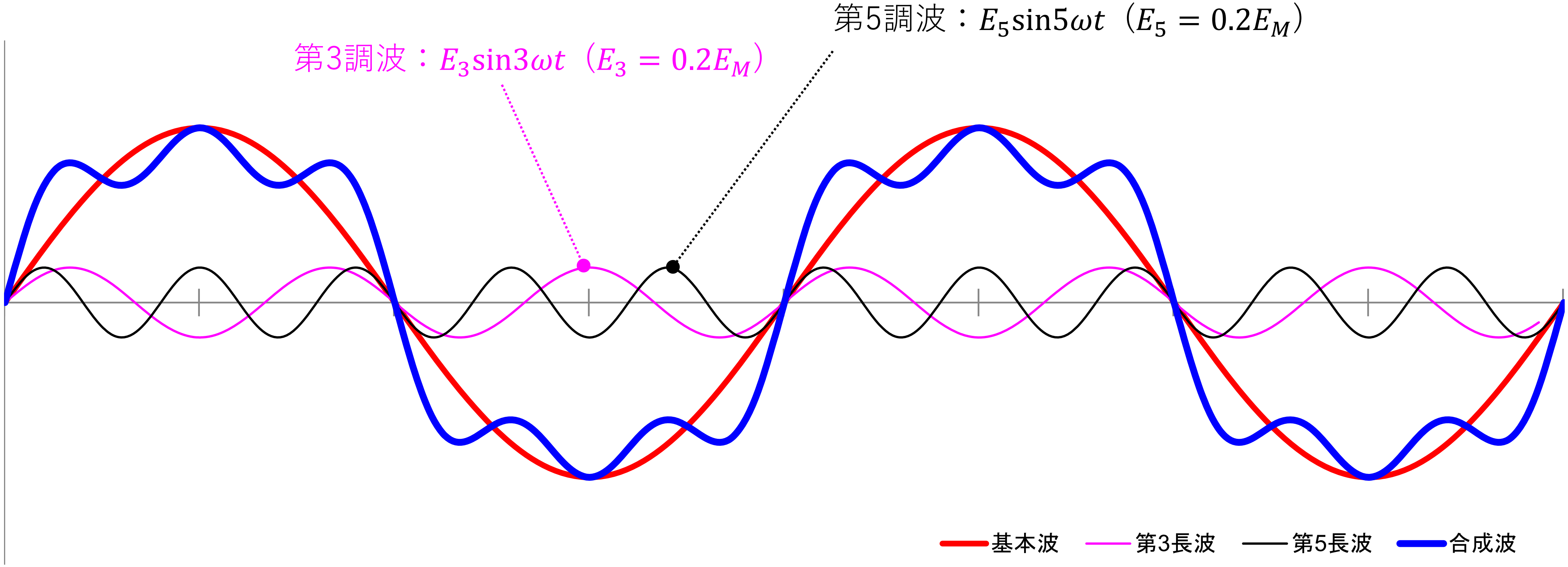


# フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin\omega t$　　第 n 調波：$E_M \sin n\omega t$

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

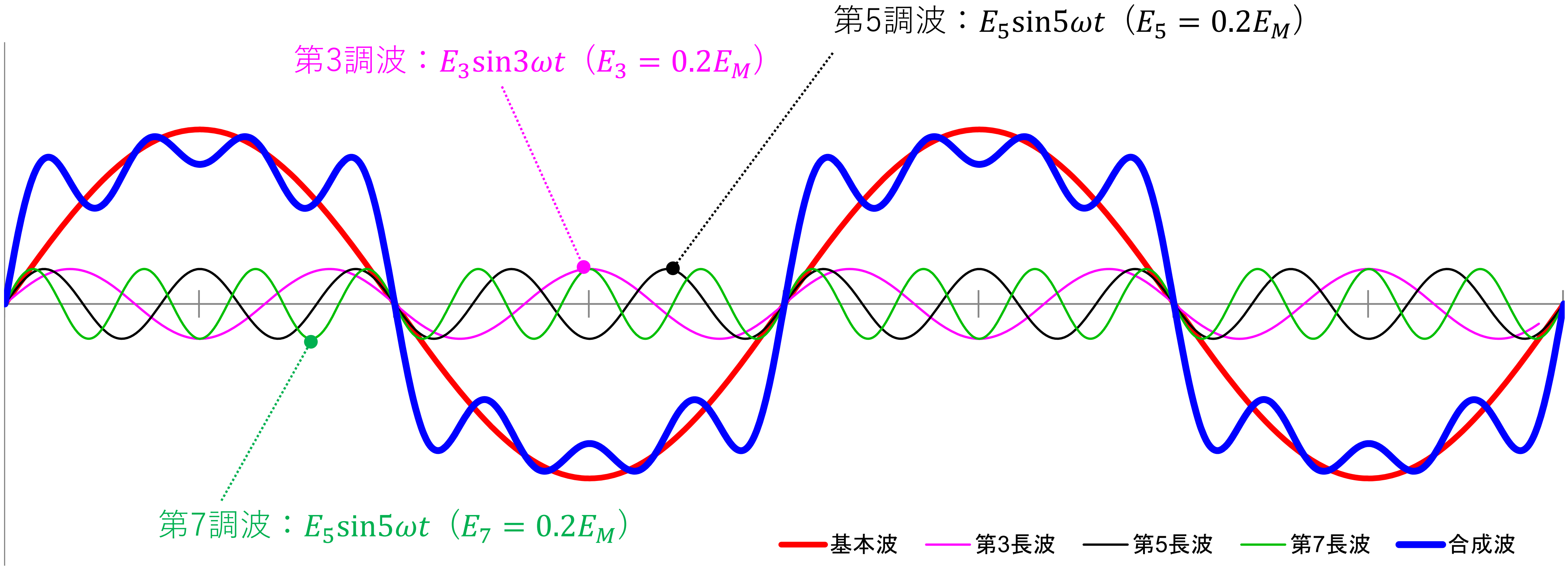


フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin\omega t$　　第ｎ調波：$E_M \sin n\omega t$

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

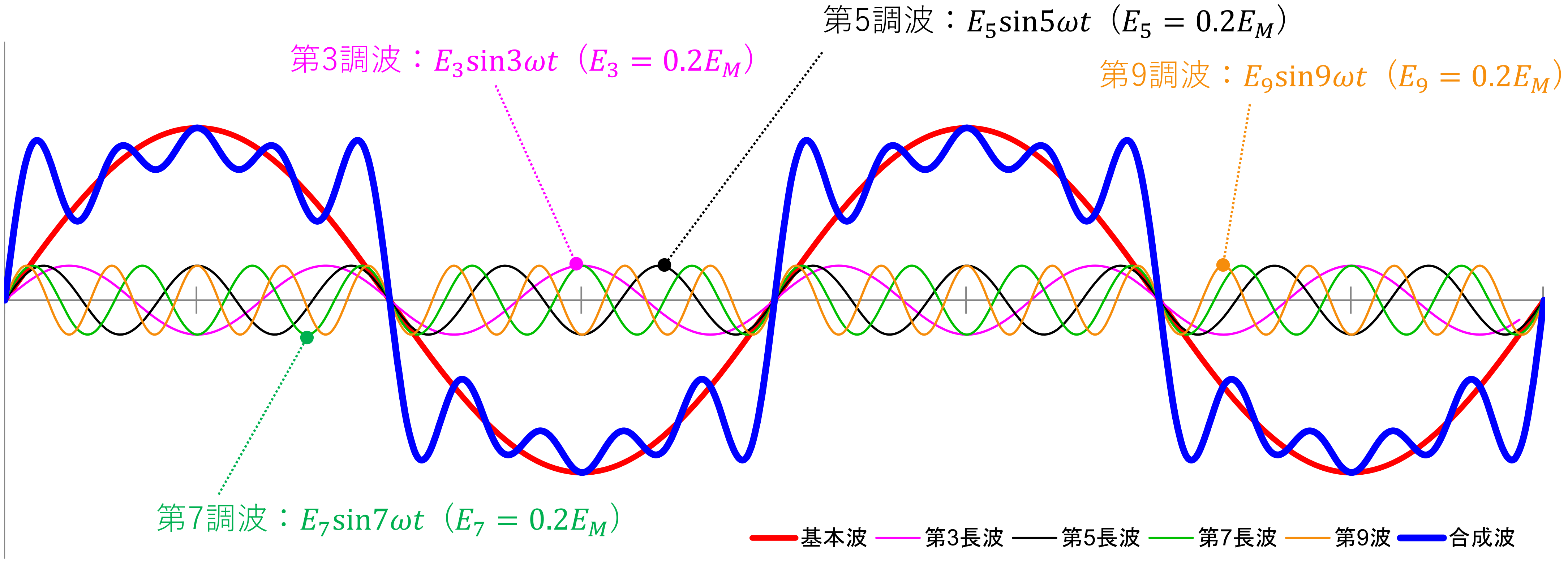


# フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M\sin\omega t$　　第 n 調波：$E_M\sin n\omega t$

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

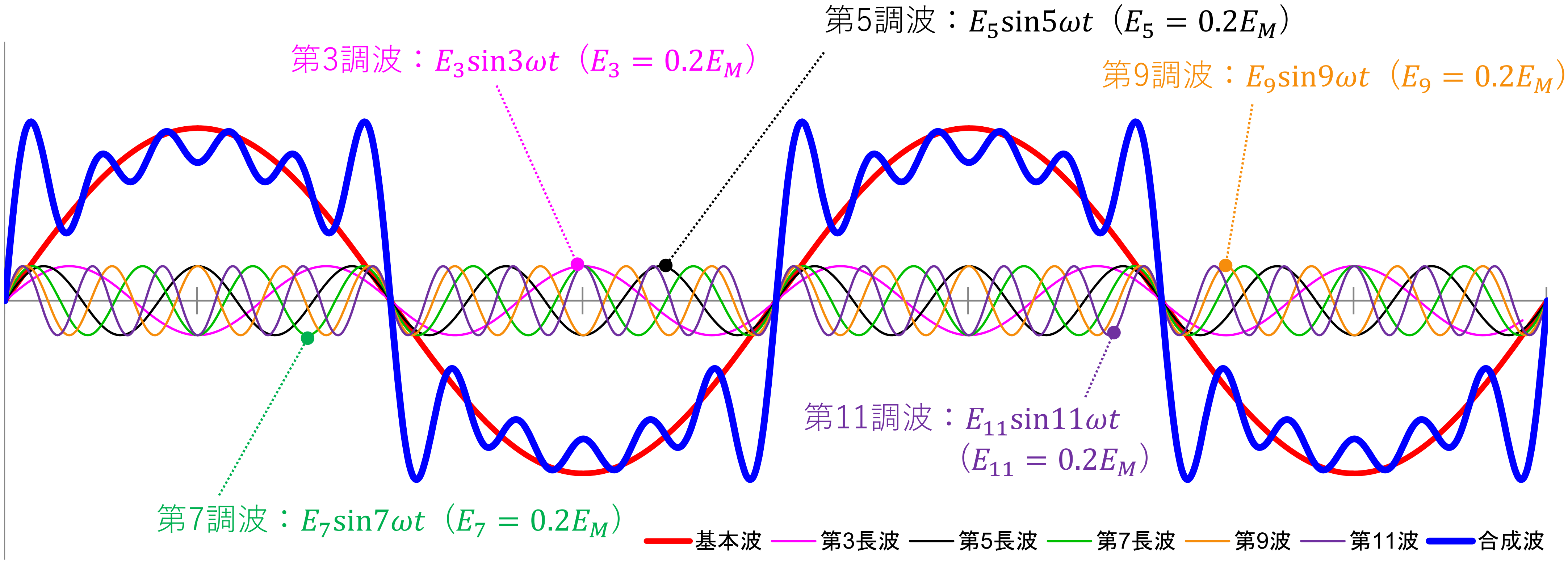


フーリエ級数 《高調波》

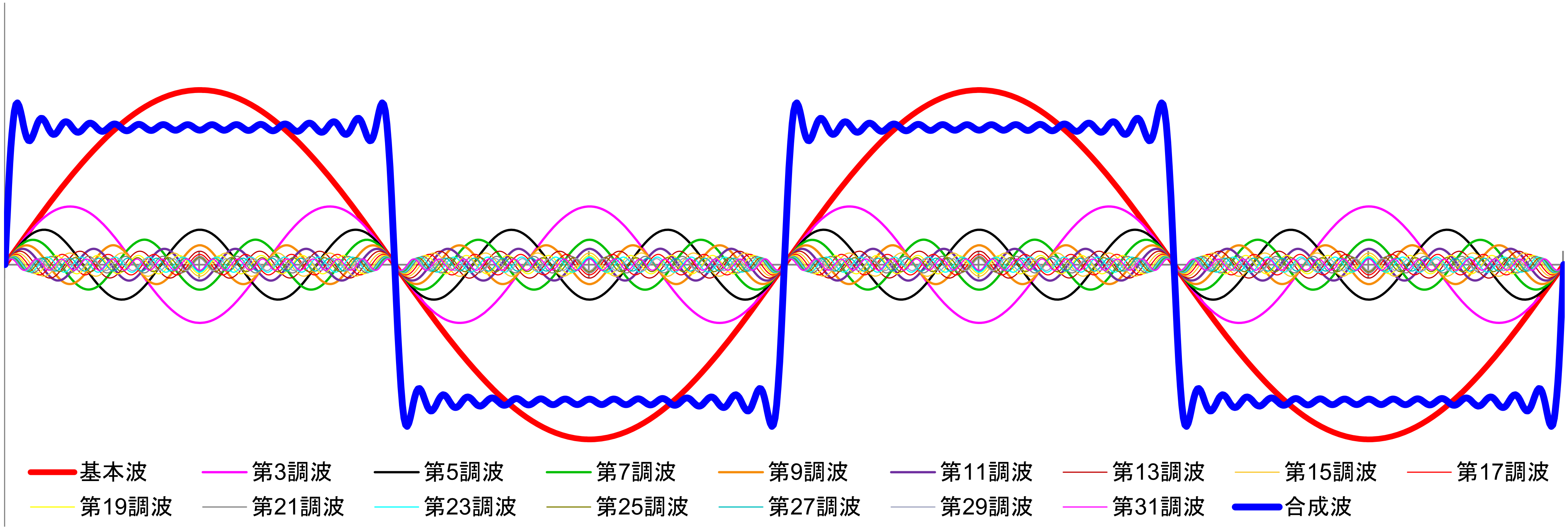
基本波：$E_M \sin\omega t$　　第 n 調波：$E_M \sin n\omega t$

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

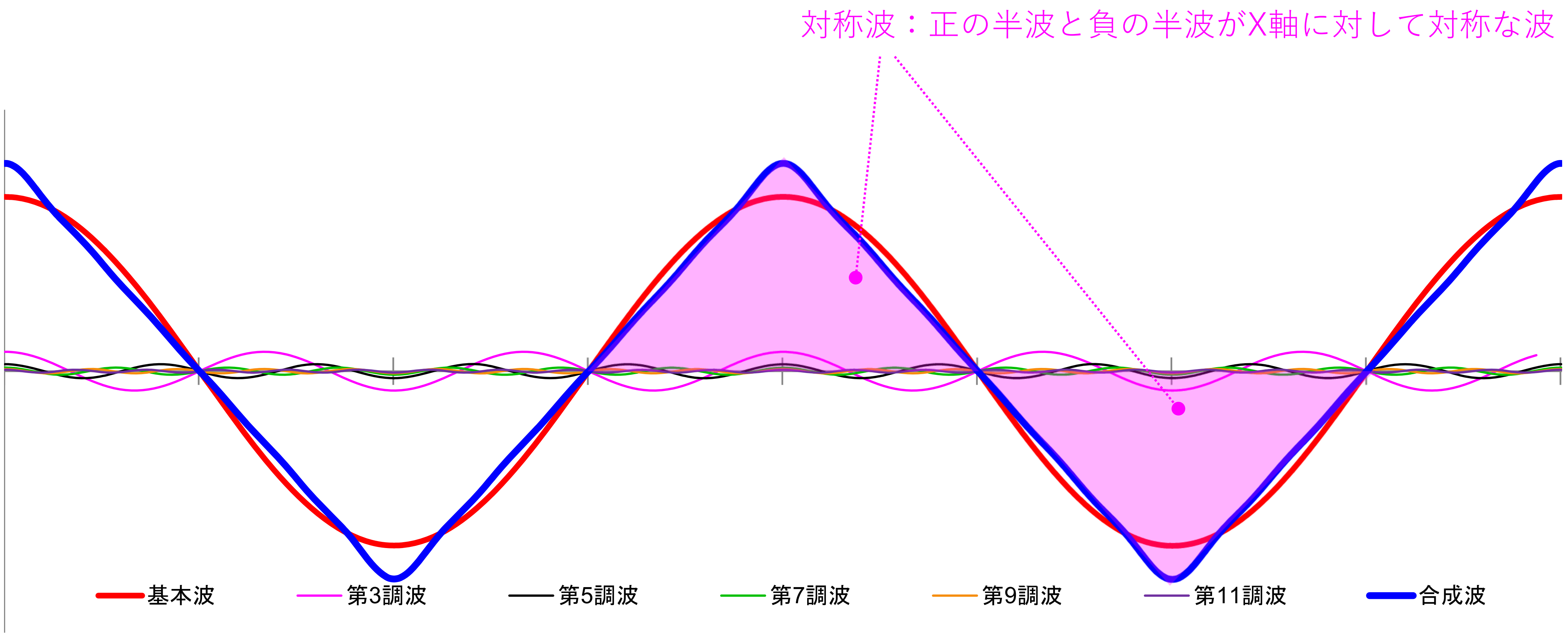


# フーリエ級数 《高調波》



基本波
第3調波
第5調波
第7調波
第9調波
第11調波
第13調波
第15調波
第17調波
第19調波
第21調波
第23調波
第25調波
第27調波
第29調波
第31調波
合成波

フーリエ級数 《高調波》



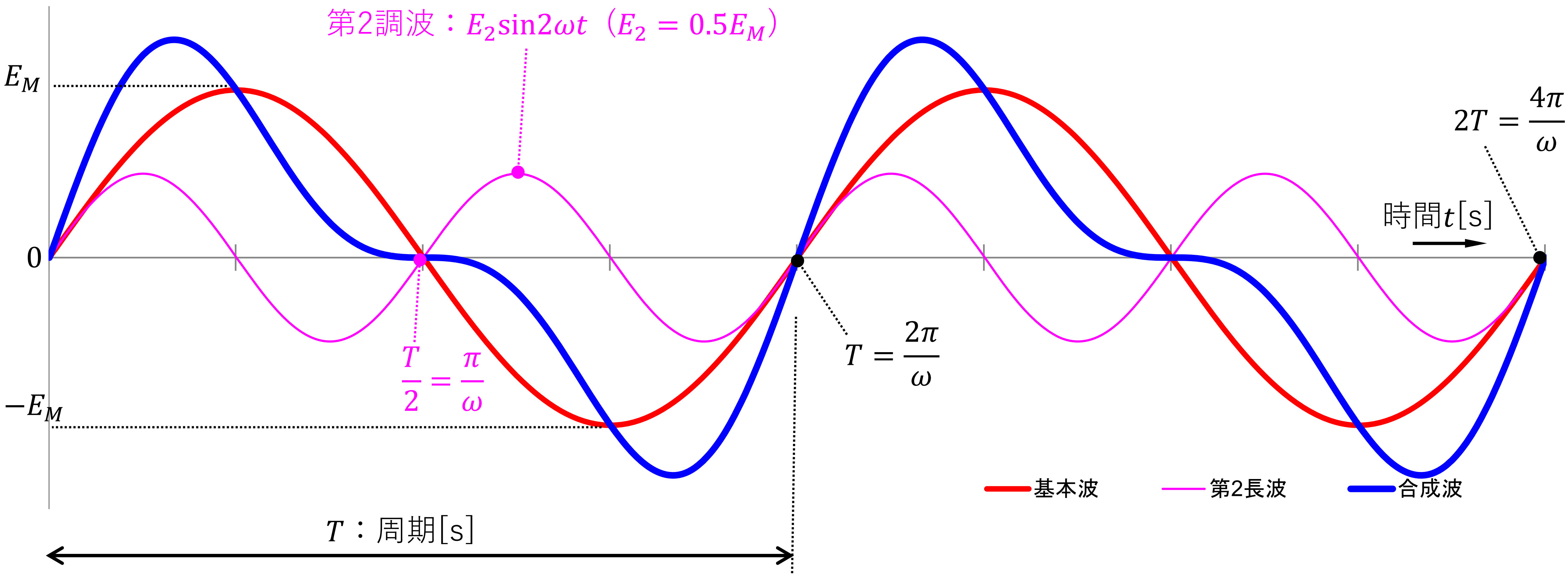
対称波：正の半波と負の半波がX軸に対して対称な波
基本波
第3調波
第5調波
第7調波
第9調波
第11調波
合成波

フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin \omega t$　　第n調波：$E_M \sin n\omega t$

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波



フーリエ級数 《高調波》

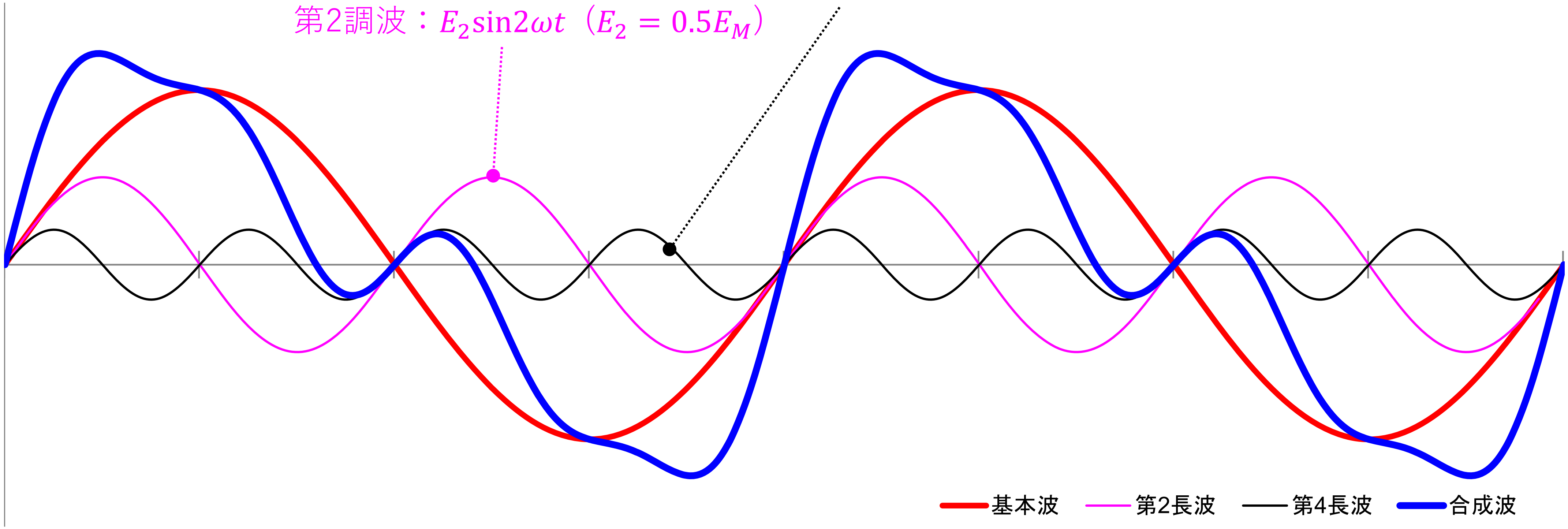
基本波：$E_M \sin \omega t$　　第 n 調波：$E_M \sin n\omega t$

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

第4調波：$E_4 \sin 4\omega t$（$E_4 = 0.2E_M$）

第2調波：$E_2 \sin 2\omega t$（$E_2 = 0.5E_M$）

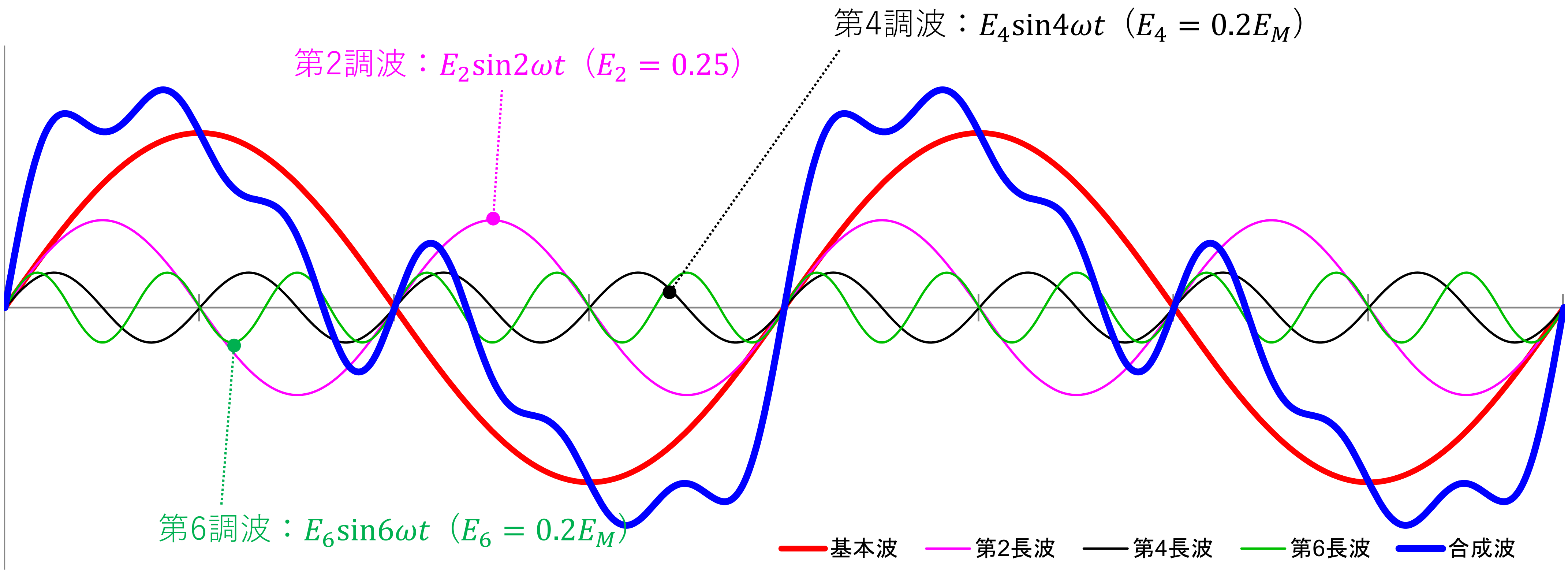


フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin\omega t$　　第 n 調波：$E_M \sin n\omega t$

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

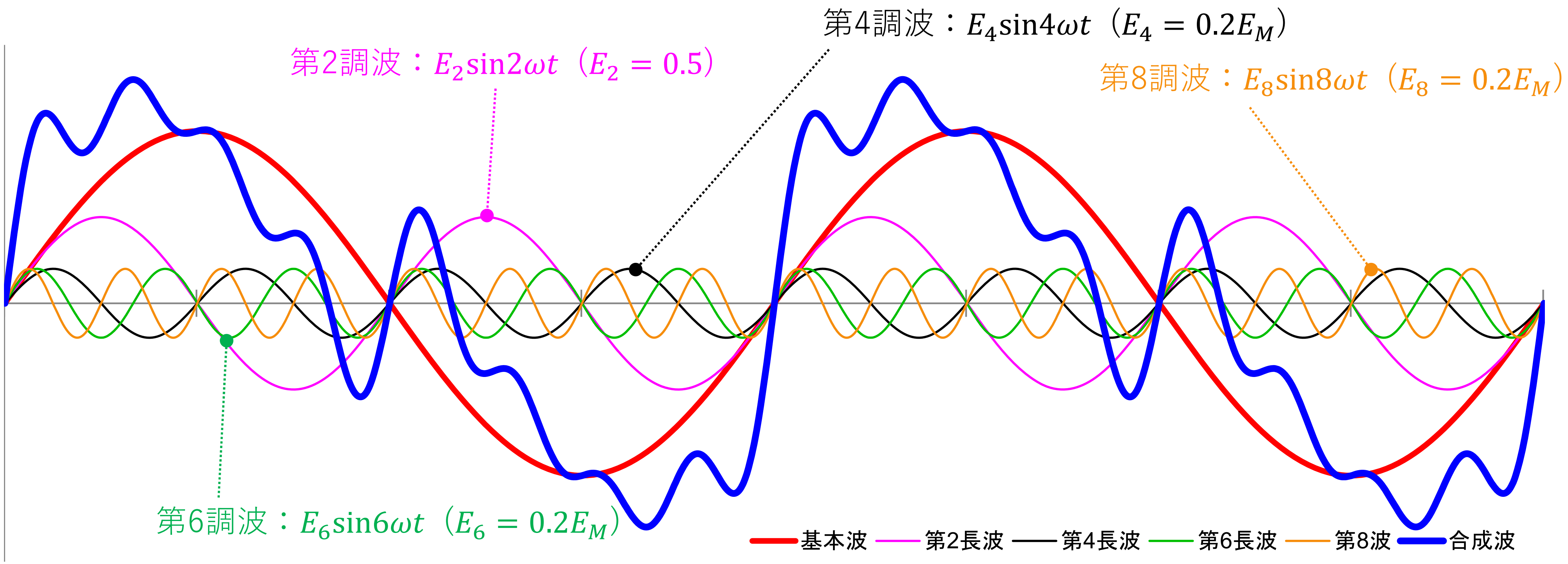


フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin\omega t$　　第ｎ調波：$E_M \sin n\omega t$

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2

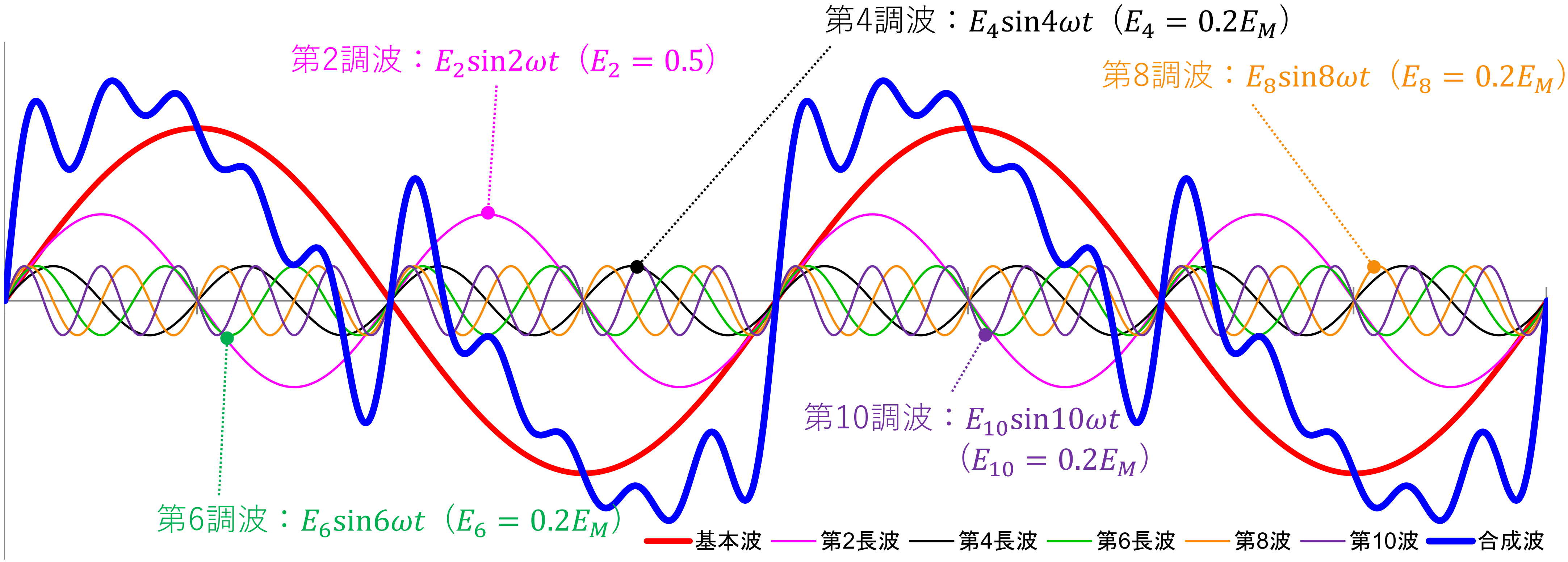


フーリエ級数 《高調波》

基本波：$E_M \sin\omega t$　　第 n 調波：$E_M \sin n\omega t$

電圧（合成波）：$e(t)$ = 基本波 + 全ての高調波

基本波：n＝1、n次の高調波：n≧2



## フーリエ級数 《フーリエ級数展開の基本形》

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx) = \underbrace{a_0\sin 0}_{0}+a_1\sin x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots$$

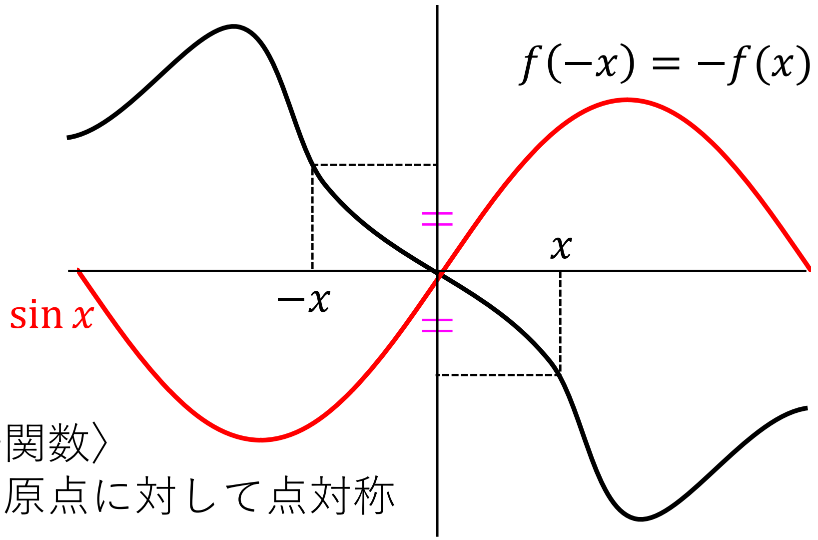
$$+\underbrace{b_0\cos 0}_{b_0}+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots$$

$$=\underbrace{a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots}_{\text{奇関数成分}}+\underbrace{b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots}_{\text{偶関数成分}}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

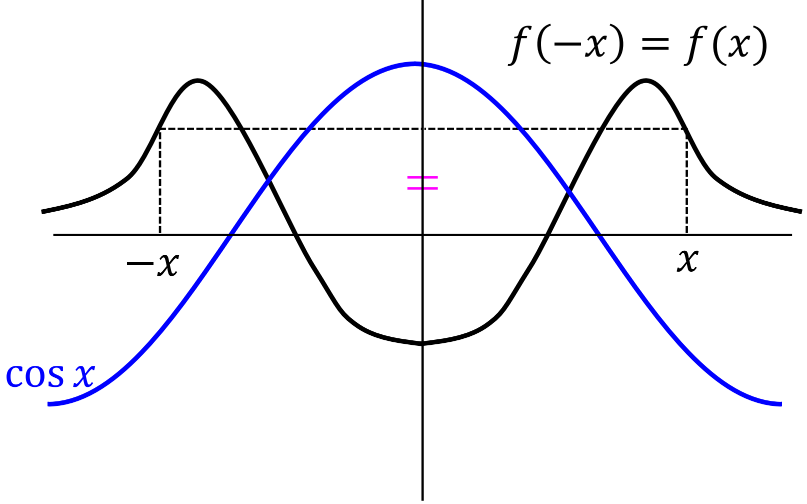
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$$




〈奇関数〉
※原点に対して点対称

〈偶関数〉
※y軸に対して線対称



フーリエ級数 《フーリエ級数の導出１》

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

**ｉ）$\mathbf{b_0}$を求める** → $f(x)$を0～$2\pi$まで積分する

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (a_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots)dx + \int_0^{2\pi} (b_0 + b_1 \cos x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots)dx \quad \cdots①$$

$$\int_0^{2\pi} a_n \sin nx \, dx = a_n \left[-\frac{\mathrm{cos}nx}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{a_n}{n}(-\mathrm{cos}2\pi n + \mathrm{cos}0) = 0 \quad \cdots②$$

$$\int_0^{2\pi} b_0 dx = b_0[x]_0^{2\pi} = b_0(2\pi - 0) = 2\pi b_0 \quad \cdots③$$

$$\int_0^{2\pi} b_n \cos nx \, dx = b_n \left[\frac{\mathrm{sin}nx}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{b_n}{n}(\mathrm{sin}2\pi n - \mathrm{sin}0) = 0 \quad \cdots④$$

①に②③④を代入すると、 $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0 + 2\pi b_0 + 0$ ∴ $b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$

フーリエ級数 《フーリエ級数の導出２》

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

**ii）$a_n$を求める**　→　$f(x)$に$\sin mx$をかけて$0〜2\pi$まで積分する

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\, dx = \int_0^{2\pi} (a_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots) \sin mx\, dx + \int_0^{2\pi} (b_0 + b_1 \cos x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots) \sin mx\, dx$$
…①

$$\int_0^{2\pi} a_n \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{a_n}{2} \int_0^{2\pi} \{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\} dx = \frac{a_n}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_0^{2\pi}$$ …②

②は$n \neq m$なら0。$n = m$ならば、

$$\int_0^{2\pi} a_n \sin^2 nx dx = \frac{a_n}{2} \int_0^{2\pi} \{1 - \cos 2nx\} dx = \frac{a_n}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{a_n}{2}(2\pi - 0 - 0 + 0) = \pi a_n$$ …③

$$\int_0^{2\pi} b_0 \sin mx\, dx = b_0 \left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_0^{2\pi} = \frac{b_0}{m}(-\cos 2\pi m + \cos 0) = 0$$ …④

$$\int_0^{2\pi} b_n \cos nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{b_n}{2} \int_0^{2\pi} \{\sin(n+m)x - \sin(n-m)x\} dx = \frac{b_n}{2} \left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_0^{2\pi}$$ …⑤

⑤は$n \neq m$なら0。$n = m$ならば、

$$\int_0^{2\pi} b_n \cos nx \cdot \sin nx\, dx = \frac{b_n}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2nx dx = \frac{b_n}{2} \left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{b_n}{4n}(-\cos 4\pi n + \cos 0) = 0$$ …⑥

$n = m$として①に③④⑥を代入すると、$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx = \pi a_n + 0 + 0$　　$\therefore\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx$

フーリエ級数 《フーリエ級数の導出３》

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots+b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots$$

**iii）$b_n$を求める** → $f(x)$に $\cos mx$をかけて$0$〜$2\pi$まで積分する

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx=\int_0^{2\pi}(a_1\sin x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots)\cos mx\,dx+\int_0^{2\pi}(b_0+b_1\cos x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots)\cos mx\,dx$$
…①

$$\int_0^{2\pi} a_n\sin nx\cdot\cos mx\,dx=\frac{a_n}{2}\int_0^{2\pi}\{\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\}dx=\frac{a_n}{2}\left[-\frac{\cos(n+m)x}{n+m}-\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_0^{2\pi}\cdots②$$

②は$n\neq m$なら$0$。$n=m$ならば、

$$\int_0^{2\pi} a_n\sin nx\cdot\cos nx\,dx=\frac{a_n}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2nx dx=\frac{a_n}{2}\left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi}=\frac{a_n}{4n}(-\cos 4\pi n+\cos 0)=0\cdots③$$

$$\int_0^{2\pi} b_0\cos mx\,dx=b_0\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{2\pi}=\frac{b_0}{m}(\sin 2\pi m-\sin 0)=0\cdots④$$

$$\int_0^{2\pi} b_n\cos nx\cdot\cos mx\,dx=\frac{b_n}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\}dx=\frac{b_n}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_0^{2\pi}\cdots⑤$$

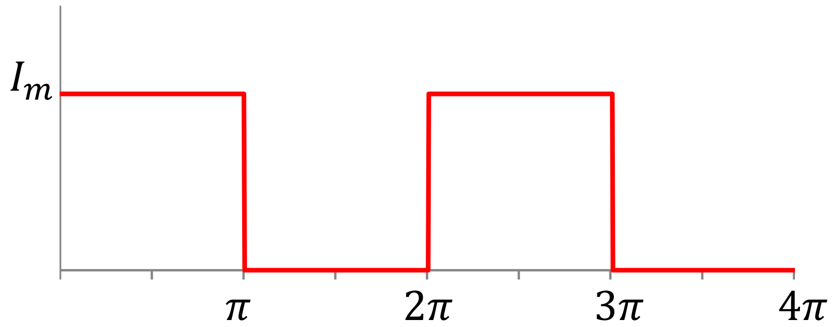
⑤は$n\neq m$なら$0$。$n=m$ならば、

$$\int_0^{2\pi} b_n\cos^2 nx dx=\frac{b_n}{2}\int_0^{2\pi}\{1+\cos 2nx\}dx=\frac{b_n}{2}\left[x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi}=\frac{b_n}{2}(2\pi+0-0-0)=\pi b_n\cdots⑥$$

$n=m$として①に③④⑥を代入すると、$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=\pi b_n+0+0$ $\therefore\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$

フーリエ級数 《例題１》

$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots+b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots$ を求める。




$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}I_m\sin nx\,dx=\frac{I_m}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{I_m}{n\pi}(-\cos n\pi+1)$ ⋯①

①は$n$が偶数なら0。従って$n$が奇数のとき、

$=\frac{I_m}{n\pi}(1+1)=\frac{2I_m}{n\pi}$ ⋯②

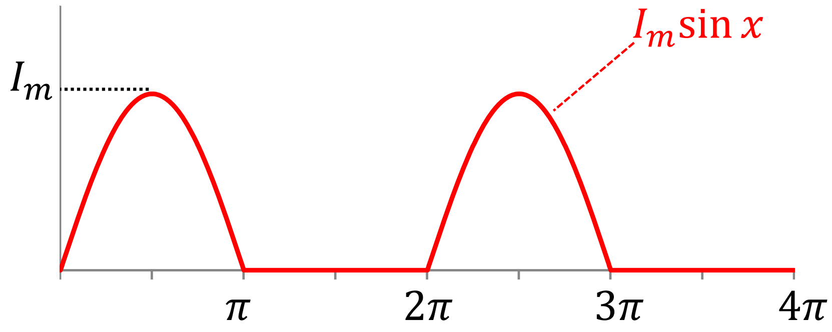
$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}I_m dx=\frac{I_m}{2\pi}[x]_0^{\pi}=\frac{I_m}{2\pi}(\pi-0)=\frac{I_m}{2}$ ⋯③

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}I_m\cos nx\,dx=\frac{I_m}{\pi}\int_0^{\pi}I_m\cos nx\,dx=\frac{I_m}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{I_m}{n\pi}(\sin n\pi-0)=0$ ⋯④

②,③,④より $f(x)=\frac{I_m}{2}+\frac{2I_m}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$

## フーリエ級数 《例題２》

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$ を求める。




②,③,⑤より

$$f(x) = \frac{I_m}{2}\sin x + \frac{I_m}{\pi} - \frac{2I_m}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \cdots\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin x \cdot \sin nx\,dx = \frac{I_m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\}dx = \frac{I_m}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} \quad \cdots①$$

①は$n \neq 1$なら0。従って$n = 1$のとき、

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin^2 x dx = \frac{I_m}{2\pi}\int_0^{\pi}\{1 - \cos 2x\}dx = \frac{I_m}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{I_m}{2\pi}(\pi - 0 - 0 + 0) = \frac{I_m}{2} \quad \cdots②$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin x\,dx = \frac{I_m}{2\pi}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{I_m}{2\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{I_m}{\pi} \quad \cdots③$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin x \cos nx\,dx = \frac{I_m}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}dx = \frac{I_m}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \quad \cdots④$$

④は$n$が奇数なら0。従って$n$が偶数のとき、

$$= \frac{I_m}{2\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{I_m}{\pi}\left(\frac{n-1}{(n+1)(n-1)} - \frac{n+1}{(n+1)(n-1)}\right) = -\frac{2I_m}{\pi(n^2-1)} \quad \cdots⑤$$

## フーリエ級数 《奇関数のフーリエ級数展開》

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx)=\boxed{a_0\sin 0}^{\,0}+a_1\sin x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots$$

$$+\underbrace{\boxed{b_0\cos 0}}_{b_0}+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots$$

$$=\underbrace{a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots}_{\text{奇関数成分}}$$ ~~$+b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx+\cdots$~~

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad\Longrightarrow$$

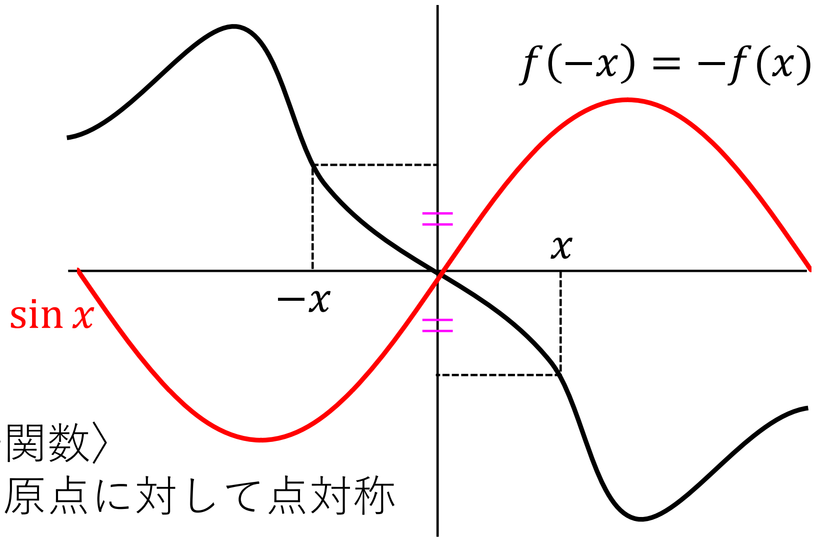
$$a_n=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\pi}^{0}f(-x)\sin n(-x)\,d(-x)+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{\pi}^{0}-f(x)\cdot-\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$




〈奇関数〉
※原点に対して点対称

## フーリエ級数 《偶関数のフーリエ級数展開》

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

$= $ ~~$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$~~

$+b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$

偶関数成分

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \end{cases}$$

⇒

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(-x)d(-x) + \int_0^{\pi} f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\, dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(-x)\cos n(-x)\, d(-x) + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\, dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right\}$$

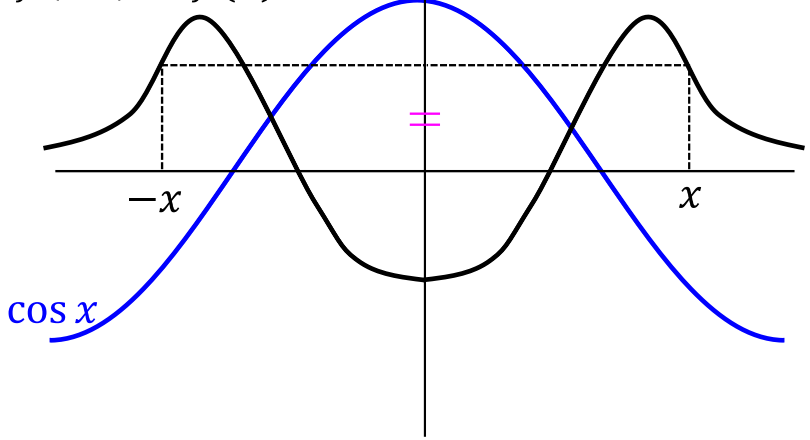
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

〈偶関数〉

※y軸に対して左右対称

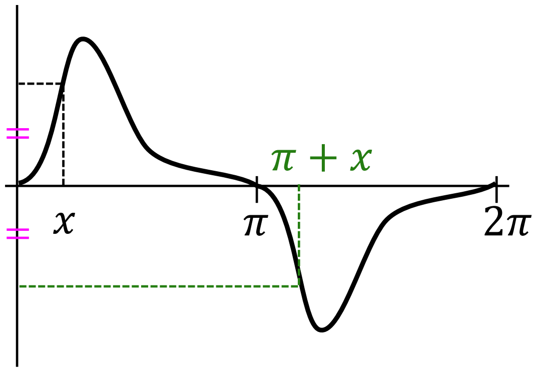
$f(-x)=f(x)$



<u>フーリエ級数</u> 《対称波のフーリエ級数展開》

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

対称波




$$f(\pi + x) = -f(x)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$b_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$n = 1, 3, 5, 7, 9 \cdots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} f(\pi + x) \sin n(\pi + x) \, d(\pi + x)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} -f(x) \sin n(n\pi + nx) \, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx - (-1)x^n \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx\right\}$$

$n$が奇数のとき$a_n = 0$、$n$が偶数のとき$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(\pi + x) d(\pi + x)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) dx - \int_0^{\pi} f(x) dx\right\} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} f(\pi + x) \cos n(\pi + x) \, d(\pi + x)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} -f(x) \cos n(n\pi + nx) \, dx\right\}$$

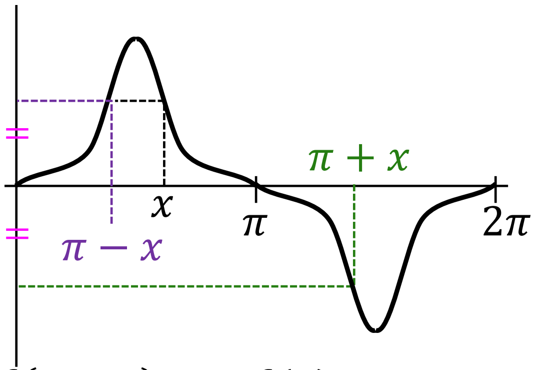
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - (-1)x^n \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx\right\}$$

$n$が奇数のとき$b_n = 0$、$n$が偶数のとき$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$

フーリエ級数 《１／4波対称のフーリエ級数展開》

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

１／4波対称




$$f(\pi + x) = -f(x)$$

$$f(\pi - x) = f(x) = -f(-x)$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx$$

$$b_0 = 0$$

$$b_n = 0$$

$n = 1，3，5，7，9 \cdots$

奇関数となっているので$b_0 = 0$、$b_{\mathrm{n}} = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx\right\} \cdots ①$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx \, dx = \int_{\pi}^{0} f(-x) \sin n(-x) \, d(-x) = -\int_{\pi}^{0} -f(x)(-\sin nx) dx$$

$$= \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx \cdots ②$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - x) \sin n(\pi - x) \, d(\pi - x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(x) \sin(n\pi - nx) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx - (-1)x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx$$

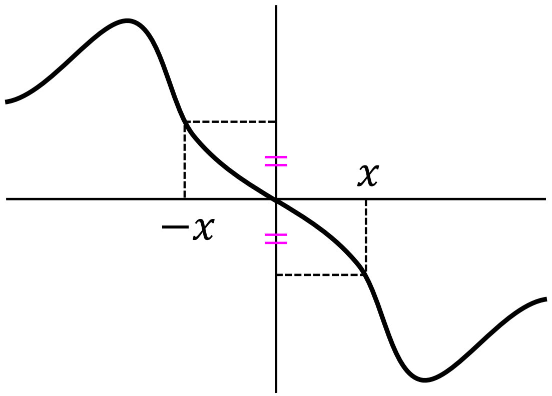
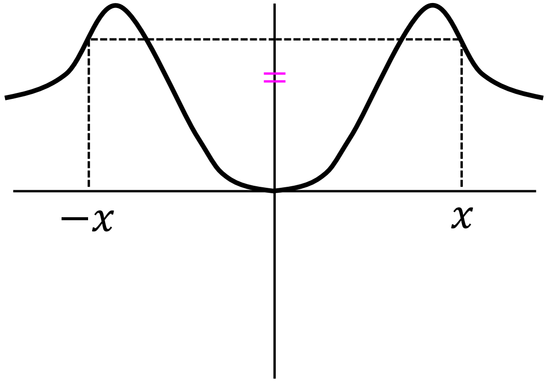
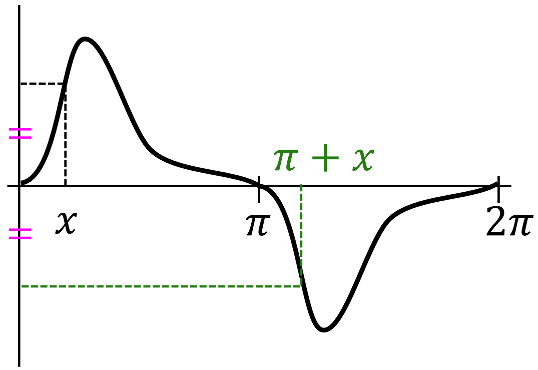
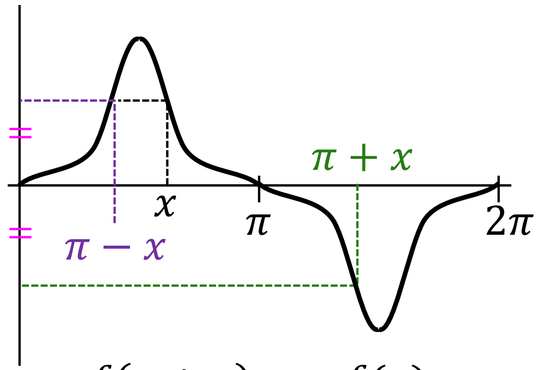
$n$が偶数のとき$a_n = 0$、$n$が奇数のとき$b_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx \cdots ③$

$n$が偶数として①に②③を代入すると、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx\right\} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx$$

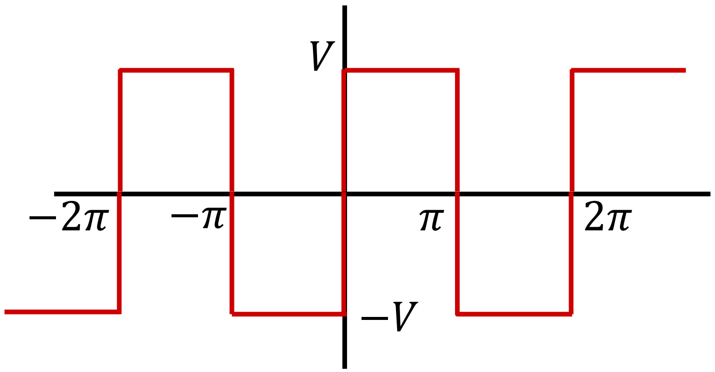
フーリエ級数 《特殊波形のフーリエ級数展開まとめ》

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

<table>
<tr><th>奇関数</th><th>偶関数</th><th>対称波</th><th>1／4波対称</th></tr>
<tr>
<td>
<br>$f(-x) = -f(x)$</td>
<td>
<br>$f(-x) = f(x)$</td>
<td>
<br>$f(\pi + x) = -f(x)$</td>
<td>
<br>$f(\pi + x) = -f(x)$<br>$f(\pi - x) = f(x)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$<br>$b_0 = 0$<br>$b_n = 0$</td>
<td>$a_n = 0$<br>$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) dx$<br>$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$</td>
<td>$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$<br>$b_0 = 0$<br>$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$</td>
<td>$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx$<br>$b_0 = 0$<br>$b_n = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$n = 1, 2, 3, 4, 5 \cdots$</td>
<td>$n = 1, 2, 3, 4, 5 \cdots$</td>
<td>$n = 1, 3, 5, 7, 9 \cdots$</td>
<td>$n = 1, 3, 5, 7, 9 \cdots$</td>
</tr>
</table>

# フーリエ級数　《例題３》

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$ を求める。

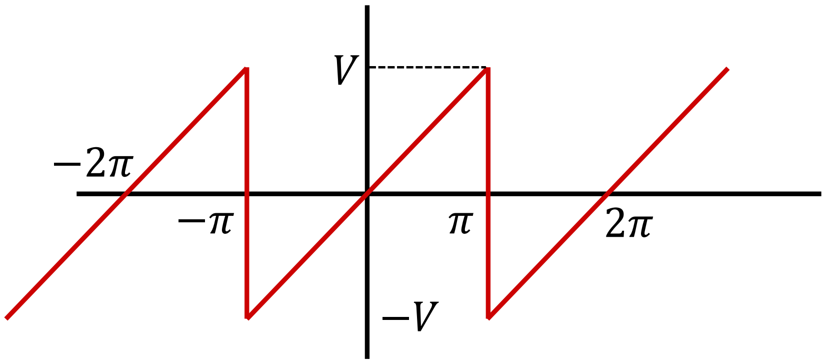



１／4波対称なので、$b_0 = 0$、$b_n = 0$、nは奇数のみ

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V\sin nx\,dx = \frac{4V}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4V}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{2} + \cos 0\right) = \frac{4V}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4V}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \cdots)$$

$$\therefore f(x) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots\right)$$




奇関数なので、$b_0 = 0$、$b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{V}{\pi}x\sin nx\,dx = \frac{2V}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2V}{\pi^2}\left\{\left[x \cdot -\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right\}$$

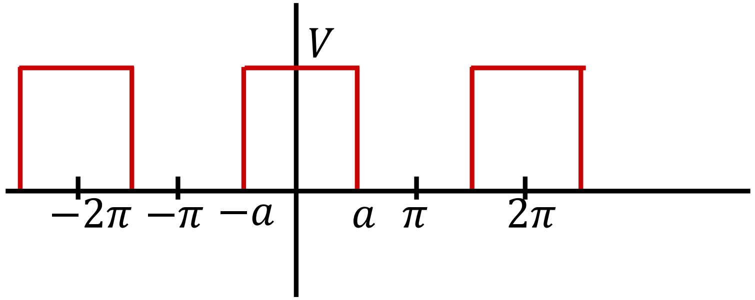
$$= \frac{2V}{\pi^2}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2V}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{2V}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2V}{n\pi}(-1)^n = \frac{2V}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2V}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right)$$

## フーリエ級数 《例題４》

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$ を求める。

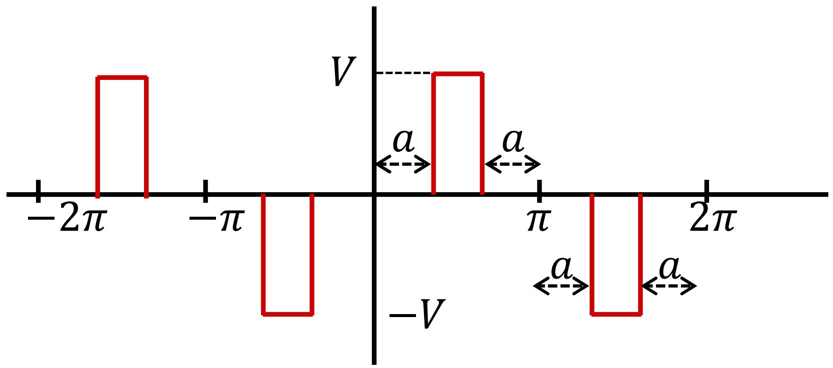



偶関数なので、$\mathrm{a}_n = 0$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{a} V dx = \frac{V}{\pi}[x]_0^a = \frac{Va}{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} V\cos nx\, dx = \frac{2V}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^a = \frac{2V}{\pi n}\sin na$$

$$\therefore f(x) = \frac{2V}{\pi}\left(\frac{a}{2} + \sin \mathrm{a} \cos x + \frac{1}{2}\sin 2\mathrm{a} \cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3\mathrm{a} \cos 3x + \cdots\right)$$




１／4波対称なので、$b_0 = 0$、$b_n = 0$、nは奇数のみ

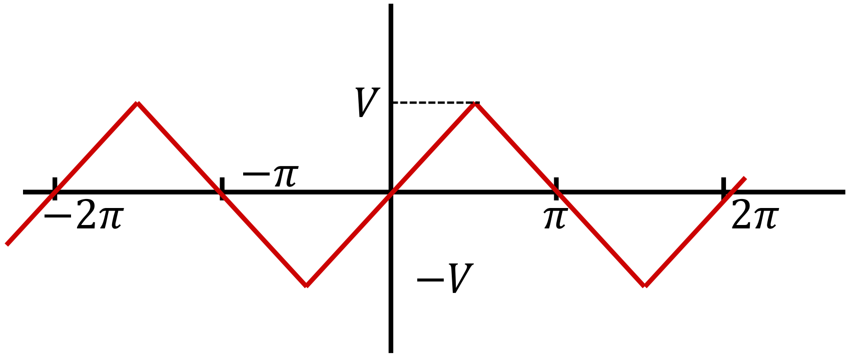
$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\, dx = \frac{4}{\pi}\int_{\mathrm{a}}^{\frac{\pi}{2}} V\sin nx\, dx = \frac{4V}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\mathrm{a}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4V}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{2} + \cos na\right) = \frac{4V}{n\pi}\cos na \quad (n = 1, 3, 5, 7, \cdots)$$

$$\therefore f(x) = \frac{4V}{\pi}\left(\cos a \sin x + \frac{1}{3}\cos 3a \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5a \sin 5x + \cdots\right)$$

フーリエ級数 《例題５》

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$ を求める。




１／4波対称なので、$b_0 = 0$、$b_n = 0$、nは奇数のみ

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2V}{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{8V}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{8V}{\pi^2}\left\{\left[x \cdot -\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{8V}{\pi^2}\left\{-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \frac{8V}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3,5,7, \cdots)$$

$n = 1, 5,9,13, \cdots$のとき、$a_n = \frac{8V}{n^2\pi^2}$

$n = 3, 7,11,15, \cdots$のとき、$a_n = -\frac{8V}{n^2\pi^2}$

$$\therefore f(x) = \frac{8V}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \frac{1}{49}\sin 7x + \cdots\right)$$