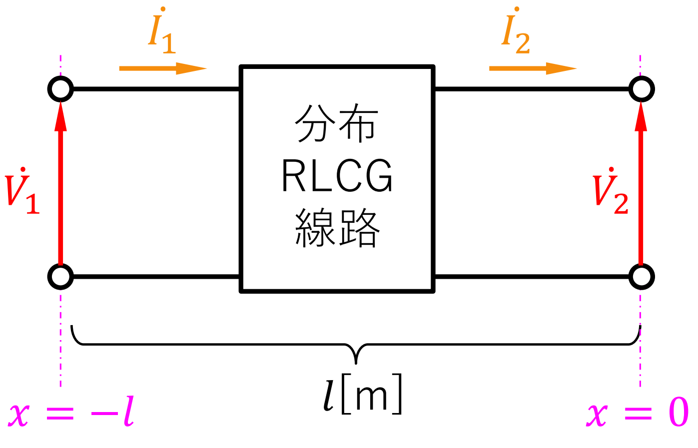
分布定数回路（４）《四端子定数の導出》



①,②より

入力 $\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{V}(-l) = Ae^{\dot{\gamma}l} + Be^{-\dot{\gamma}l} \\ \dot{I}_1 = \dot{I}(-l) = \dfrac{1}{\dot{Z}_0}\left(Ae^{\dot{\gamma}l} - Be^{-\dot{\gamma}l}\right) \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\dot{\gamma}l} & e^{-\dot{\gamma}l} \\ \dfrac{e^{\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0} & -\dfrac{e^{-\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cdots ③$$

出力 $\begin{cases} \dot{V}_2 = \dot{V}(0) = A + B \\ \dot{I}_2 = \dot{I}(0) = \dfrac{1}{\dot{Z}_0}(A - B) \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\dot{Z}_0} & -\dfrac{1}{\dot{Z}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cdots ④$$

④より
$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\dot{Z}_0} & -\frac{1}{\dot{Z}_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = -\frac{\dot{Z}_0}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\dot{Z}_0} & -1 \\ -\frac{1}{\dot{Z}_0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \cdots ⑤$$

③,⑤より

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = -\frac{\dot{Z}_0}{2} \begin{bmatrix} e^{\dot{\gamma}l} & e^{-\dot{\gamma}l} \\ \frac{e^{\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0} & -\frac{e^{-\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\dot{Z}_0} & -1 \\ -\frac{1}{\dot{Z}_0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = -\frac{\dot{Z}_0}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0} & -e^{\dot{\gamma}l} + e^{-\dot{\gamma}l} \\ -\frac{e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0{}^2} & -\frac{e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}}{\dot{Z}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}}{2} & \frac{e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}}{2}\dot{Z}_0 \\ \frac{e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}}{2\dot{Z}_0} & \frac{e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}}{\dot{2}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \cdots ⑥$$

縦続行列（K行列）

伝搬方程式の解

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = Ae^{-\dot{\gamma}x} + Be^{\dot{\gamma}x} & \cdots ① \\ \dot{I}(x) = \dfrac{1}{\dot{Z}_0}\left(Ae^{-\dot{\gamma}x} - Be^{\dot{\gamma}x}\right) & \cdots ② \end{cases}$$

双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdots ⑦$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cdots ⑧$$

⑥,⑦,⑧より

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cosh(\dot{\gamma}l) & \dot{Z}_0 \sinh(\dot{\gamma}l) \\ \frac{1}{\dot{Z}_0}\sinh(\dot{\gamma}l) & \cosh(\dot{\gamma}l) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

分布定数回路（４）《無損失線路の四端子定数》

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\dot{\gamma} l) & \dot{Z}_0 \sinh(\dot{\gamma} l) \\ \frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh(\dot{\gamma} l) & \cosh(\dot{\gamma} l) \end{bmatrix}$$

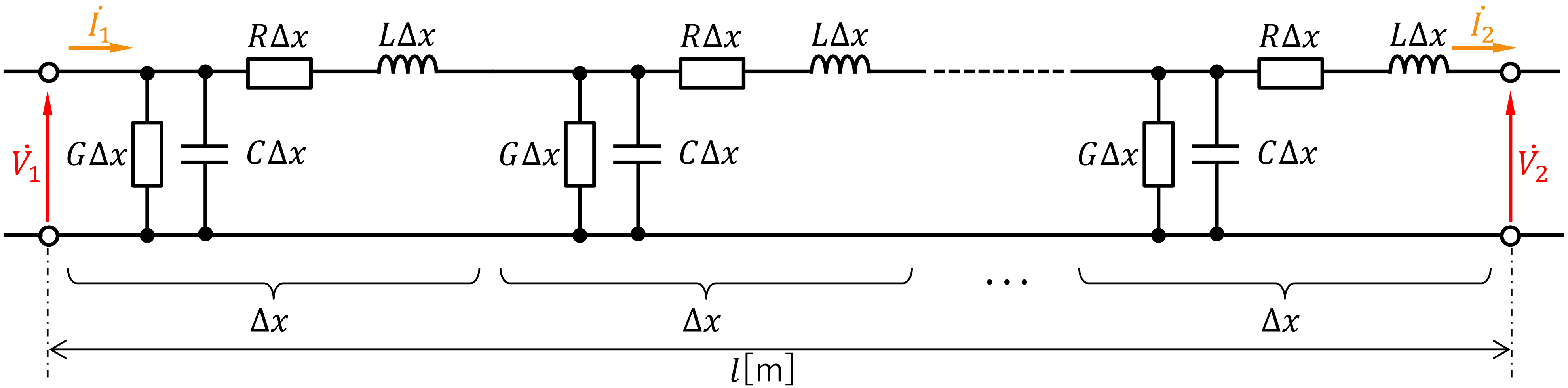
$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta & \text{※伝搬定数} \\ \dot{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} & \text{※特性インピーダンス} \end{cases}$$

無損失線路（$R = G = 0$）の場合

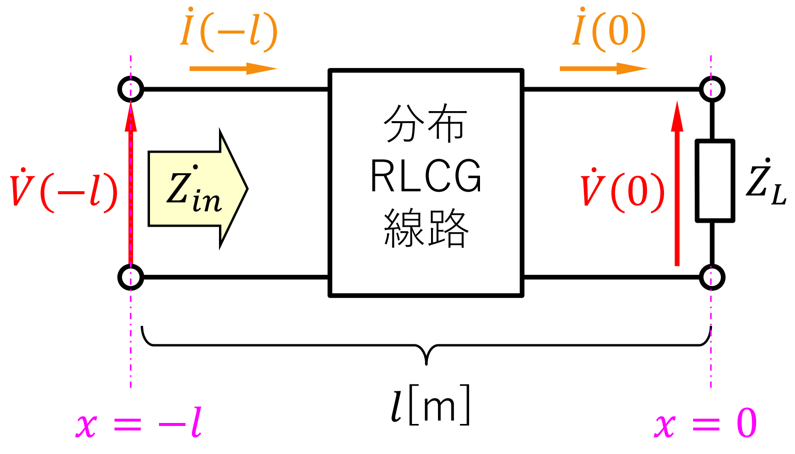
$\cosh(jx) = \cos\ (x)$、$\sinh(jx) = j\sin(x)$より

$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(j\beta l) & \dot{Z}_0 \sinh(j\beta l) \\ \frac{1}{\dot{Z}_0} \sinh(j\beta l) & \cosh(j\beta l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j\dot{Z}_0 \sin(\beta l) \\ \frac{j}{\dot{Z}_0} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta & \text{※伝搬定数} \\ \dot{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C}} & \text{※特性インピーダンス} \end{cases}$$



分布定数回路（４）《入力インピーダンス》



出力端子におけるオームの法則に①,②を代入

$$\dot{Z}_L=\frac{\dot{V}(0)}{\dot{I}(0)}=\dot{Z}_0\frac{Ae^{-\dot{\gamma}0}+Be^{\dot{\gamma}0}}{Ae^{-\dot{\gamma}0}-Be^{\dot{\gamma}0}}=\dot{Z}_0\frac{A+B}{A-B}$$

$$\dot{Z}_L(A-B)=\dot{Z}_0(A+B)\quad A\left(\dot{Z}_L-\dot{Z}_0\right)=B\left(\dot{Z}_L+\dot{Z}_0\right)\quad B=\frac{\dot{Z}_L-\dot{Z}_0}{\dot{Z}_L+\dot{Z}_0}A \quad \cdots③$$

入力端子におけるオームの法則に①,②を代入

$$\dot{Z}_{in}=\frac{\dot{V}(-l)}{\dot{I}(-l)}=\dot{Z}_0\frac{Ae^{\dot{\gamma}l}+Be^{-\dot{\gamma}l}}{Ae^{\dot{\gamma}l}-Be^{-\dot{\gamma}l}}\quad\cdots④$$

④に③を代入

$$\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\frac{e^{\dot{\gamma}l}+\dfrac{\dot{Z}_L-\dot{Z}_0}{\dot{Z}_L+\dot{Z}_0}e^{-\dot{\gamma}l}}{e^{\dot{\gamma}l}-\dfrac{\dot{Z}_L-\dot{Z}_0}{\dot{Z}_L+\dot{Z}_0}e^{-\dot{\gamma}l}}=\dot{Z}_0\frac{\dot{Z}_L\left(e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}\right)+\dot{Z}_0\left(e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}\right)}{\dot{Z}_L\left(e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}\right)+\dot{Z}_0\left(e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}\right)}=\dot{Z}_0\frac{\dot{Z}_L+\dot{Z}_0\dfrac{e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}}{e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}}}{\dot{Z}_0+\dot{Z}_L\dfrac{e^{\dot{\gamma}l}-e^{-\dot{\gamma}l}}{e^{\dot{\gamma}l}+e^{-\dot{\gamma}l}}}\quad\cdots⑤$$

伝搬方程式の解

$$\begin{cases}\dot{V}(x)=Ae^{-\dot{\gamma}x}+Be^{\dot{\gamma}x} & \cdots①\\ \dot{I}(x)=\dfrac{1}{\dot{Z}_0}\left(Ae^{-\dot{\gamma}x}-Be^{\dot{\gamma}x}\right) & \cdots②\end{cases}$$

双曲線関数

$$\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdots⑥$$

$$\tanh(jx)=j\tan(x)\quad\cdots⑧$$

⑤,⑥より $\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\dfrac{\dot{Z}_L+\dot{Z}_0\tanh(\dot{\gamma}l)}{\dot{Z}_0+\dot{Z}_L\tanh(\dot{\gamma}l)}$ …⑦

無損失線路($\dot{\gamma}=j\beta$)のとき、⑦,⑧より

無損失線路の
入力インピーダンス： $\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\dfrac{\dot{Z}_L+j\dot{Z}_0\tan(\beta l)}{\dot{Z}_0+j\dot{Z}_L\tan(\beta l)}$

分布定数回路（４）《無損失線路の入力インピーダンス》

無損失線路の入力インピーダンス： $\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\dfrac{\dot{Z}_L+j\dot{Z}_0\tan(\beta l)}{\dot{Z}_0+j\dot{Z}_L\tan(\beta l)}$

伝搬速度[m/s]：$v=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\dfrac{\omega}{\beta}$　　波長[m]：$\lambda=\dfrac{v}{f}=\dfrac{\frac{\omega}{\beta}}{\frac{\omega}{2\pi}}=\dfrac{2\pi}{\beta}$

■線路長が波長に比べて十分に短い場合（$l \ll \lambda$）

$\lim_{l\to 0}\beta l=0$　　$\tan(0)=0$　　$\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\dfrac{\dot{Z}_L+j\dot{Z}_0\tan 0}{\dot{Z}_0+j\dot{Z}_L\tan 0}=\dot{Z}_L$

■線路長が波長の $\dfrac{n}{2}$ 倍の場合 $\left(l=\dfrac{n\lambda}{2}\right)$　※n：整数

$\beta l=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{n\lambda}{2}=n\pi$　　$\tan(n\pi)=0$　　$\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\dfrac{\dot{Z}_L+j\dot{Z}_0\tan n\pi}{\dot{Z}_0+j\dot{Z}_L\tan n\pi}=\dot{Z}_L$

■線路長が波長の $\dfrac{n}{4}$ 倍の場合 $\left(l=\dfrac{n\lambda}{4}\right)$

$\beta l=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{n\lambda}{4}=\dfrac{n\pi}{2}$　　$\tan\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=\infty$

$$\dot{Z}_{in}=\dot{Z}_0\dfrac{\dfrac{\dot{Z}_L}{\tan\left(\frac{n\pi}{2}\right)}+j\dot{Z}_0}{\dfrac{\dot{Z}_0}{\tan\left(\frac{n\pi}{2}\right)}+j\dot{Z}_L}=\dfrac{\dot{Z}_0{}^2}{\dot{Z}_L}$$

無損失線路（$R=G=0$）のとき

$$\begin{cases}\dot{V}(x)=Ae^{-\dot{\gamma}x}\\ \dot{I}(x)=\dfrac{A}{\dot{Z}_0}e^{-\dot{\gamma}x}\end{cases}$$

伝搬定数：

$\dot{\gamma}=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+j\beta$

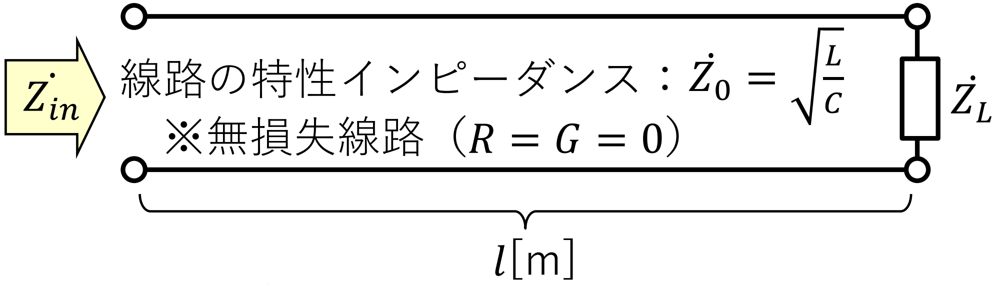
$=j\omega\sqrt{LC}$　　$\therefore\alpha=0$、$\beta=\omega\sqrt{LC}$

特性インピーダンス：

$\dot{Z}_0=\sqrt{\dfrac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

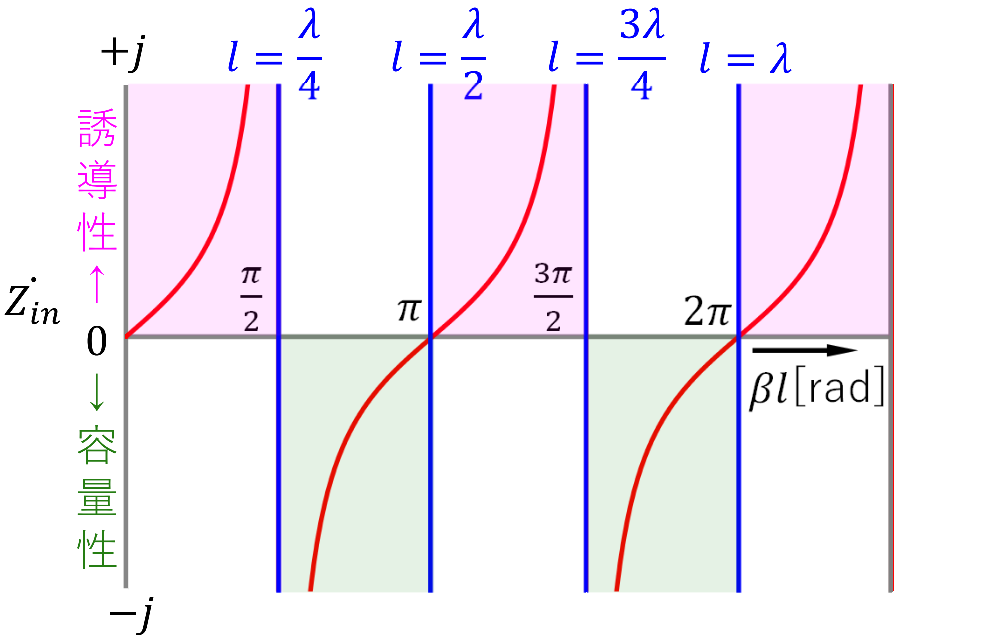
分布定数回路（４）《入力インピーダンスの性質》

無損失線路の
入力インピーダンス：$\dot{Z}_{in} = \dot{Z}_0 \dfrac{\dot{Z}_L + j\dot{Z}_0 \tan(\beta l)}{\dot{Z}_0 + j\dot{Z}_L \tan(\beta l)}$　※$\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$



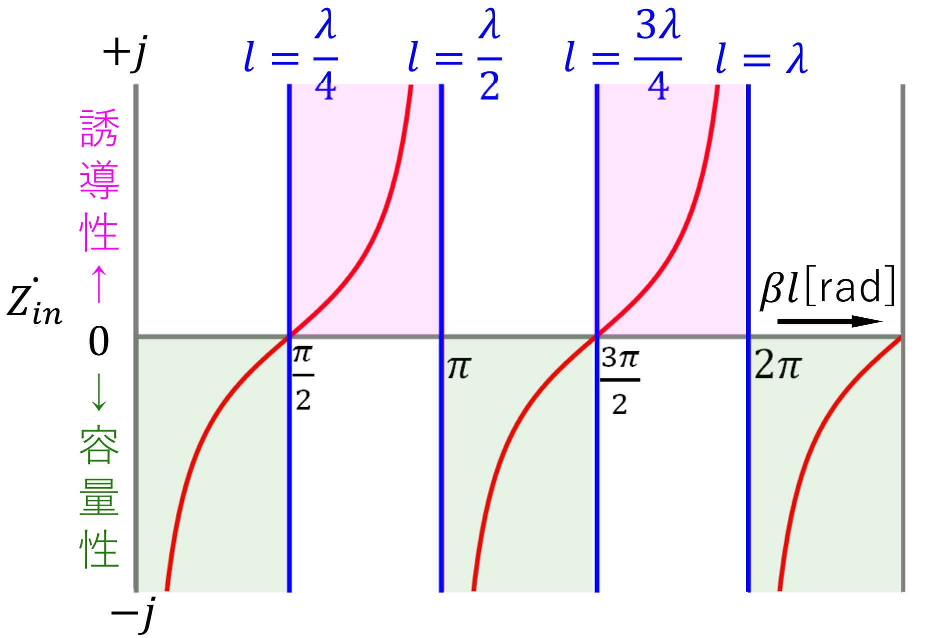
■短絡時（$\dot{Z}_L = 0$）

$$\dot{Z}_{in} = \dot{Z}_0 \frac{j\dot{Z}_0 \tan(\beta l)}{\dot{Z}_0} = j\,\dot{Z}_0 \tan(\beta l) = j\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \tan(\beta l)$$



■開放時（$\dot{Z}_L = \infty$）

$$\dot{Z}_{in} = \dot{Z}_0 \frac{1 + j\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_L}\tan(\beta l)}{\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_L} + j\tan(\beta l)} = \frac{\dot{Z}_0}{j\tan(\beta l)} = -j\sqrt{\frac{L}{C}}\cot(\beta l)$$



分布定数回路（４）《線路によるインピーダンス整合》

伝送路２から負荷側を見た入力インピーダンス： $\dot{Z}_{in} = \dot{Z}_1 \dfrac{R + j\dot{Z}_1 \tan(\beta l)}{\dot{Z}_1 + jR \tan(\beta l)}$

$\beta l = \dfrac{\pi}{2} \cdots ②$ → $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \infty$ とすると①より、 $\dot{Z}_0 = \dot{Z}_1 \dfrac{\dfrac{R}{\tan(\beta l)} + j\dot{Z}_1}{\dfrac{\dot{Z}_1}{\tan(\beta l)} + jR} = \dfrac{\dot{Z}_1{}^2}{R}$ $\quad \dot{Z}_1 = \sqrt{\dot{Z}_0 R} \quad \cdots ③$

$\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ の関係があるので、②より、 $l = \dfrac{\pi}{2\beta} = \dfrac{\pi}{2 \cdot \dfrac{2\pi}{\lambda}} = \dfrac{\lambda}{4} \quad \cdots ④$

∴③④より、伝送路２の線路長が $\dfrac{\lambda}{4}$（又はその整数倍）で、特性インピーダンスが $\sqrt{\dot{Z}_0 R}$ であれば無反射となる。これを $\dfrac{1}{4}$ 波長整合回路と呼ぶ。