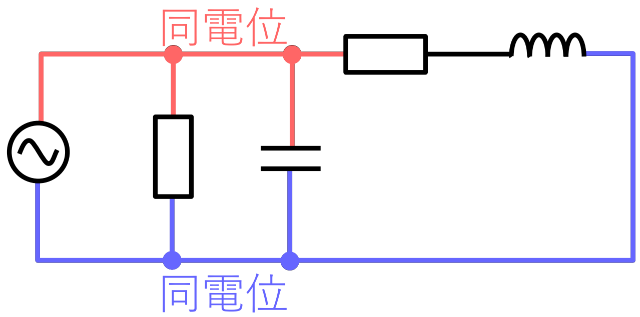
分布定数回路（1）　《分布定数回路の必要性》

交流電圧[V]：$e(t) = E\sin\omega t = E\sin 2\pi f t$

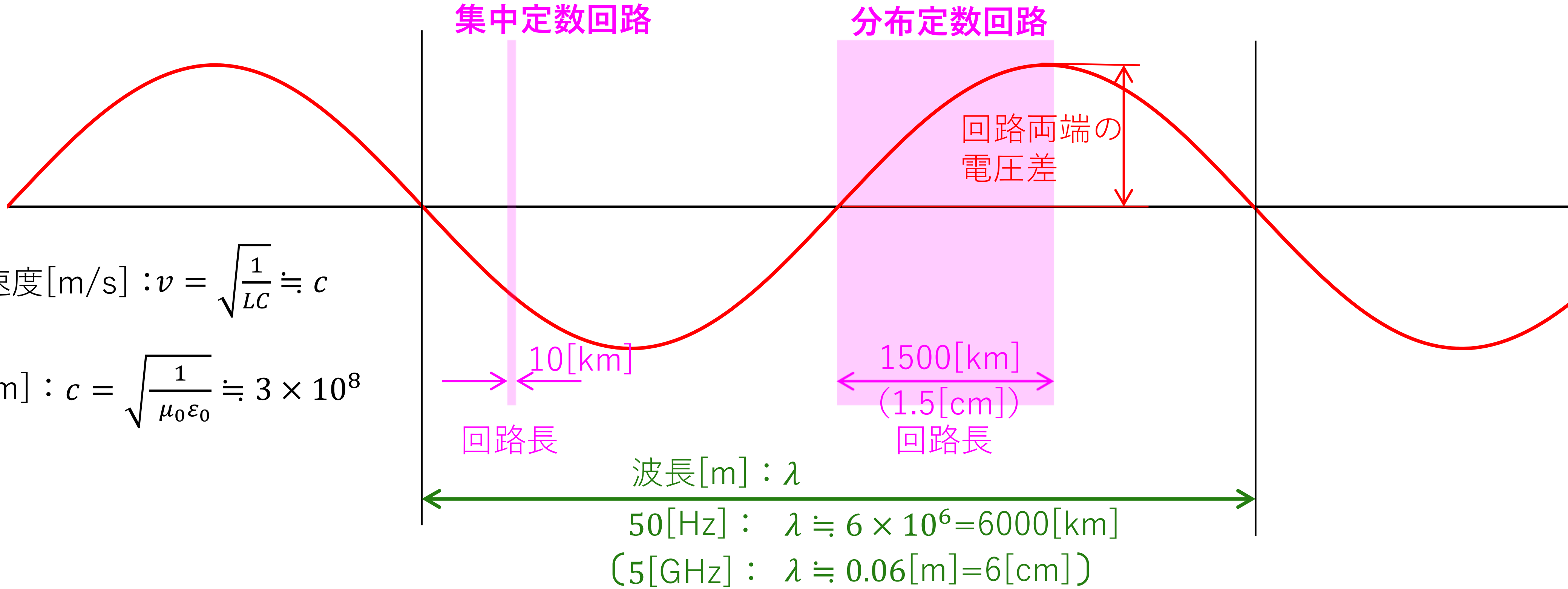
ω：角速度[rad/s]　f：周波数[Hz]　波長[m]：$\lambda = \dfrac{v}{f}$

集中定数回路



伝搬速度[m/s]：$v = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \fallingdotseq c$

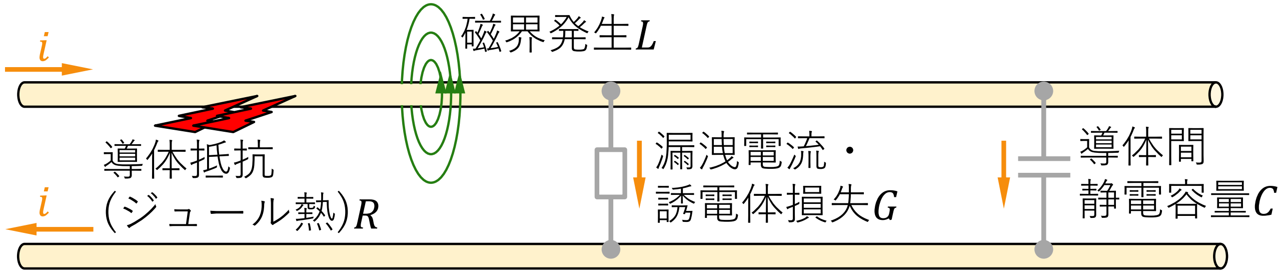
光速[m]：$c = \sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} \fallingdotseq 3\times10^8$



分布定数回路（１）　《分布RLCG回路》

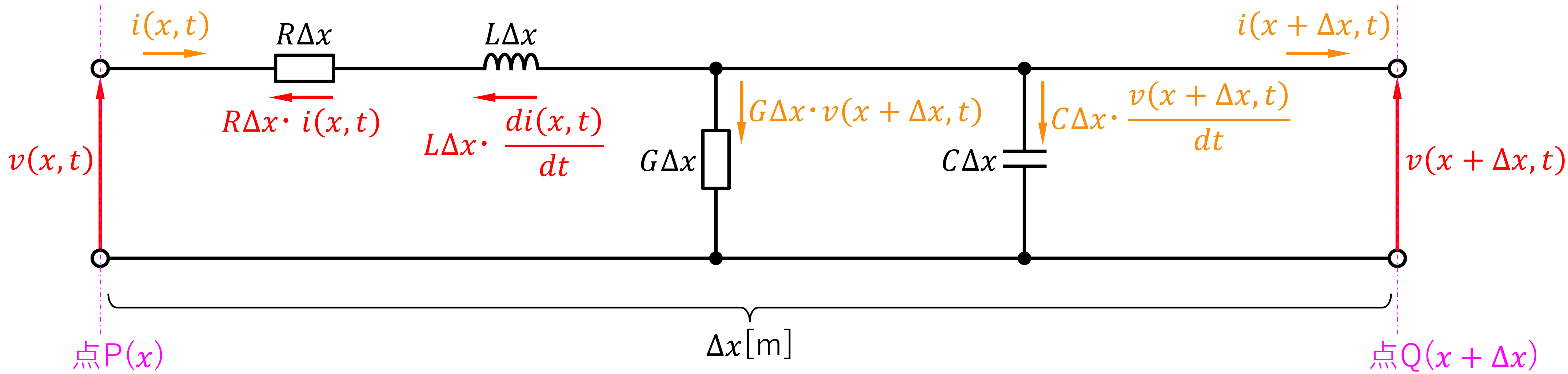
線路定数

・直列抵抗[Ω/m]：R
・直列リアクタンス[H/m]：L
・分路コンダクタンス[S/m]：G
・分路静電容量[F/m]：C



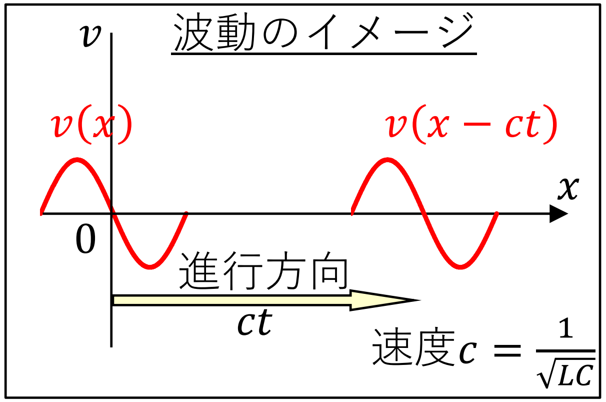
$$
\begin{cases}
v(x,t) - v(x+\Delta x,t) = R\Delta x \cdot i(x,t) + L\Delta x \cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\
i(x,t) - i(x+\Delta x,t) = G\Delta x \cdot v(x+\Delta x,t) + C\Delta x \cdot \dfrac{\partial v(x+\Delta x,t)}{\partial t}
\end{cases}
$$

【分布RLCG回路】



分布定数回路（１）　　《伝搬方程式》

$$\begin{cases} v(x,t)-v(x+\Delta x,t)=R\Delta x\cdot i(x,t)+L\Delta x\cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} & \cdots ① \\ i(x,t)-i(x+\Delta x,t)=G\Delta x\cdot v(x+\Delta x,t)+C\Delta x\cdot \dfrac{\partial v(x+\Delta x,t)}{\partial t} & \cdots ② \end{cases}$$



①,②の両辺をΔxで割り、Δx→0とすると

分布定数回路の基礎方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x}=R\cdot i+L\cdot\dfrac{\partial i}{\partial t} & \cdots ③ \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x}=G\cdot v+C\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t} & \cdots ④ \end{cases}$$

③をxで微分 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-R\cdot\dfrac{\partial i}{\partial x}-L\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial i}{\partial x}$ …⑤

④をxで微分 $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}=-G\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}-C\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ …⑥

⑤に④を代入、⑥に③を代入

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=R\cdot\left(G\cdot v+C\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)+L\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\left(G\cdot v+C\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}=G\cdot\left(R\cdot i+L\cdot\dfrac{\partial i}{\partial t}\right)+C\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\left(R\cdot i+L\cdot\dfrac{\partial i}{\partial t}\right) \end{cases}$$

⇒

伝搬方程式（電信方程式）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=LC\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(GL+RC)\dfrac{\partial v}{\partial t}+RGv \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(GL+RC)\dfrac{\partial i}{\partial t}+RGi \end{cases}$$

⇒

※無損失線路の場合（$R=G=0$）

波動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=LC\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

分布定数回路（１）　《伝搬方程式の解１》

$e^{j\omega t}$となる電源を印加したときの定常解は　$v(x,t)=\dot{V}(x)\cdot e^{j\omega t}$ …①　$i(x,t)=\dot{I}(x)\cdot e^{j\omega t}$ …②　とおくと

分布定数回路の基礎方程式と①②より

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x}=R\cdot i+L\cdot\dfrac{\partial i}{\partial t} \\[2ex] -\dfrac{\partial i}{\partial x}=G\cdot v+C\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{d\dot{V}}{dx}=(R+j\omega L)\dot{I} & \cdots③ \\[2ex] -\dfrac{d\dot{I}}{dx}=(G+j\omega C)\dot{V} & \cdots④ \end{cases}$$

③を微分して
④を代入

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2}=\dot{\gamma}^2V \quad \cdots⑤$$

但し、$\dot{\gamma}=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$

⑤の一般解は　$\dot{V}(x)=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x}$　…⑥　※A , Bは境界条件で決まる定数

③に⑥を代入　$\dot{I}=-\dfrac{1}{R+j\omega L}\dfrac{d\dot{V}}{dx}=-\dfrac{1}{R+j\omega L}\left(-\dot{\gamma}Ae^{-\dot{\gamma}x}+\dot{\gamma}Be^{\dot{\gamma}x}\right)=\dfrac{\dot{\gamma}}{R+j\omega L}\left(Ae^{-\dot{\gamma}x}-Be^{\dot{\gamma}x}\right)=\dfrac{1}{\dot{Z}_0}\left(Ae^{-\dot{\gamma}x}-Be^{\dot{\gamma}x}\right)$

但し、$\dot{Z}_0=\sqrt{\dfrac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$

まとめると

$$\begin{cases} \dot{V}(x)=Ae^{-\dot{\gamma}x}+Be^{\dot{\gamma}x} \\[2ex] \dot{I}(x)=\dfrac{1}{\dot{Z}_0}\left(Ae^{-\dot{\gamma}x}-Be^{\dot{\gamma}x}\right) \end{cases}$$

$\dot{\gamma}=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$　　$\dot{Z}_0=\sqrt{\dfrac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$

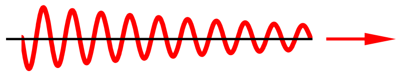
（無損失線路（$R=G=0$）の場合　$\dot{\gamma}=j\omega\sqrt{LC}$　$\dot{Z}_0=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$）

分布定数回路（１）　《伝搬方程式の解２》

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = Ae^{-\dot{\gamma}x} + Be^{\dot{\gamma}x} \\ \dot{I}(x) = \dfrac{1}{\dot{Z}_0}\left(Ae^{-\dot{\gamma}x} - Be^{\dot{\gamma}x}\right) \end{cases}$$

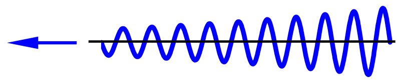
$Ae^{-\dot{\gamma}x}$ はxの正方向（進行方向）に進む波

※電源→負荷に進む入射波（xの増大で減衰）



$Be^{\dot{\gamma}x}$ はxの負方向（逆進行方向）に進む波

※負荷→電源に向かう反射波（xの増大で振動）



伝搬定数：$\dot{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$　※単位長当りの減衰量と位相変化

減衰定数[Np/m]：α　位相定数[rad/m]：β

特性インピーダンス：$\dot{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$　※電圧と電流の振幅（大きさ）の比

反射係数：$\rho_x = \dfrac{Be^{\dot{\gamma}x}}{Ae^{-\dot{\gamma}x}} = \dfrac{B}{A}e^{2\dot{\gamma}x}$　※点xにおける入射波と反射波の振幅（大きさ）の比