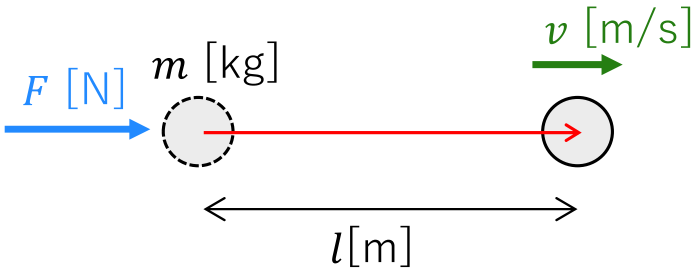
エネルギー（2）－1　《平面運動の物理》

質量m[kg]の物体に、力F [N]を加えて
t秒間で、距離l[m]移動したとき、



$$W=\int_0^T P dt=\int_0^T Fv\,dt=\int_0^T m\alpha v\,dt$$

$$=\int_0^T m\frac{dv}{dt}v\,dt=\int_0^v mv\,dv=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{運動エネルギー}}$$

仕事[J]：$W=$ 力 × 距離　$=Fl$ ・・・①

仕事率[J/s]：P $=\dfrac{\text{仕事}}{\text{時間}}=\dfrac{W}{t}=\dfrac{\boxed{F\,l}^{①}}{t}=F\boxed{v}^{②}$
[W]

速度[m/s]：v $=\dfrac{\text{距離}}{\text{時間}}=\dfrac{l}{t}$ ・・・②

加速度[m/s²]：α $=$ 単位時間の速度変化 $=\dfrac{dv}{dt}$ ・・・③

力[N]：$F=$ 質量 × 加速度　$=m\alpha=m\boxed{\dfrac{dv}{dt}}^{③}$

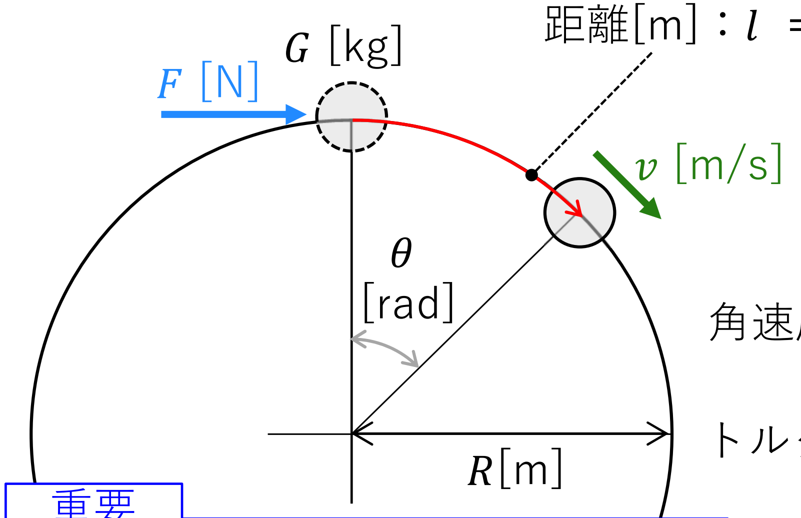
運動エネルギー [J]：$W=\dfrac{1}{2}\times$ 質量 × (速度)^2　$=\dfrac{1}{2}mv^2$

仕事と電力量は同じ次元の量　※ 1[Wh]＝1[J/s]×3600[s]＝3600[J]

仕事率と電力は同じ次元の量　※1[J/s]=1[W]

エネルギー（２）－２　《回転運動の物理１》

円周上の質量G[kg]の物体に、力F [N]を加えて
t秒間で、θ[rad]回転したとき、



距離[m]：$l = 2\pi R \cdot \dfrac{\theta}{2\pi} = R\theta \cdots$①

角速度[rad/s]：$\omega = \dfrac{\theta}{t} \cdots$②

トルク[N･m]：T = 半径 × 力 = $FR \cdots$③

※ 角加速度[rad/s ²]：$\dfrac{d\omega}{dt}$

仕事[J] ：W = 力 × 距離 $= Fl = F\overset{①}{\boxed{R\theta}} = \overset{③}{\boxed{T}}\theta \cdots$④

仕事率[J/s] [W] ：$P = \dfrac{\text{仕事}}{\text{時間}} = \dfrac{W}{t} = \dfrac{\overset{④}{\boxed{T\theta}}}{t} = \overset{②}{\boxed{\omega}}T$

速度[m/s]：$v = \dfrac{\text{距離}}{\text{時間}} = \dfrac{l}{t} = \dfrac{\overset{①}{\boxed{R\theta}}}{t} = R\overset{②}{\boxed{\omega}} \cdots$⑤

運動エネルギー [J] ：$W = \dfrac{1}{2} \times \text{質量} \times (\text{速度})^2$

$= \dfrac{1}{2}Gv^2 = \dfrac{1}{2}G\overset{⑤}{\boxed{(R\omega)^2}}$

$= \dfrac{1}{2}J\omega^2$　※ $J = GR^2$ $\cdots$⑥

力 [N]：F = 質量 × 加速度 $= G\dfrac{dv}{dt} = G\dfrac{d\overset{⑤}{\boxed{R\omega}}}{dt} = GR\dfrac{d\omega}{dt}$

$F = GR\dfrac{d\omega}{dt}$　両辺にRをかけて、$FR = GR^2\dfrac{d\omega}{dt}$ より $\overset{③}{\boxed{T}} = \overset{⑥}{\boxed{J}}\dfrac{d\omega}{dt}$

重要

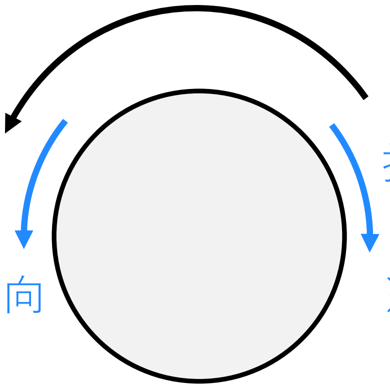
仕事率（動力）[W] ：$P = \omega T$

慣性モーメント [kg･m^2]：J

運動エネルギー [J] ：$W = \dfrac{1}{2}J\omega^2$

トルク[N･m]：$T = J\dfrac{d\omega}{dt}$

エネルギー（2）－３　《回転運動の物理２》



重要

仕事率（動力）[W]：$P=\omega T$

慣性モーメント［kg･m^2］: J

運動エネルギー［J］：$W=\frac{1}{2}J\omega^2$

トルク[N･m]：$T=J\frac{d\omega}{dt}$

1秒間の回転数は、$\frac{N}{60}$　[回転/s]

角速度[rad/s]：$\omega=\frac{2\pi N}{60}=\frac{\pi N}{30}$

運動エネルギー［J］：$W=\frac{1}{2}J\omega^2$

加速(又は減速)トルク[N･m]：$T_a=T_G-T_L$

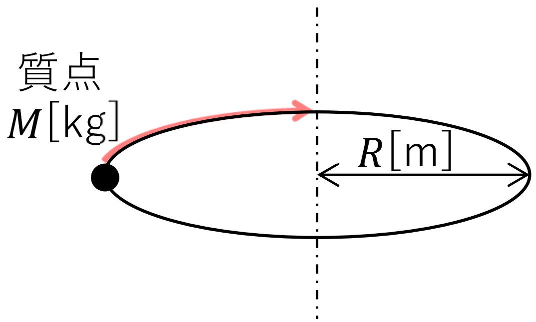
$T_G>T_L$　→　加速　、　$T_G<T_L$　→　減速

時間当たりの角速度変化[rad/s^2]：$\frac{d\omega}{dt}=\frac{T_a}{J}$
（角加速度）

回転速度が一定とは、入力トルクと抵抗トルクが等しいことを意味する。$\therefore T=T_G=T_L$

動力[W]：$P=\omega T$

エネルギー（２）－４　《慣性モーメント》



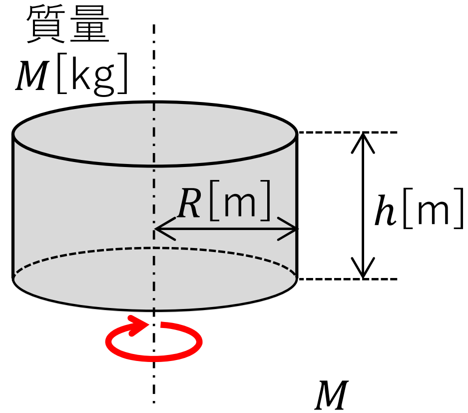
質点の慣性モーメント［kg・m^2］：$J = MR^2$

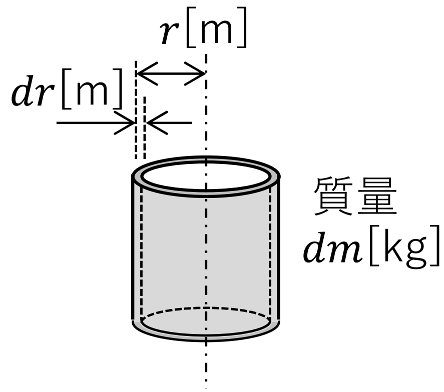
慣性モーメントの一般形：

回転軸からの距離をr[m]として

$$J = \int r^2\,dm$$

円柱の慣性モーメント





密度[kg/m^3]：$\rho = \dfrac{M}{\pi R^2 h}$

$$dm = 2\pi r h \cdot dr \cdot \rho$$
$$= 2\pi r h \cdot dr \cdot \frac{M}{\pi R^2 h}$$
$$= \frac{2M}{R^2} r \cdot dr$$

$$J = \int r^2\,dm = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3\,dr = \left|\frac{2M}{R^2}\cdot\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \left|\frac{M\,r^4}{2R^2}\right|_0^R = \frac{1}{2}MR^2$$

[kg・m^2]

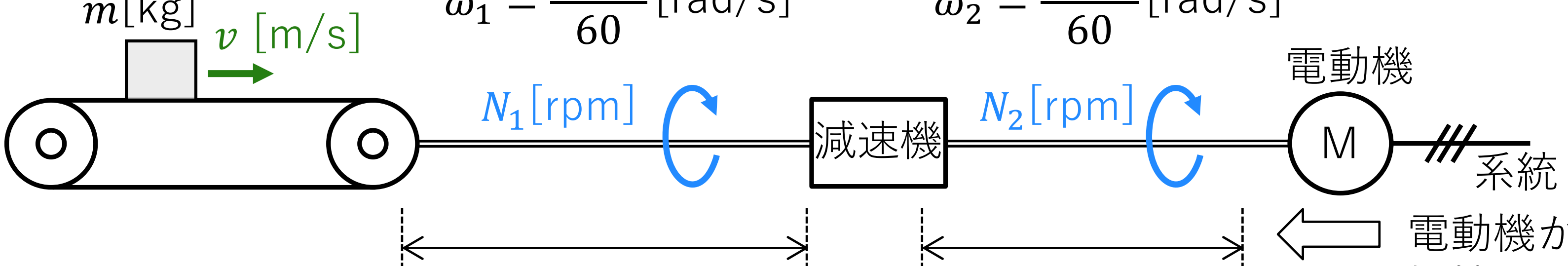
※慣性モーメントは、円柱の高さに依存しないので、

薄い円盤の慣性モーメントも　$J = \dfrac{1}{2}MR^2$ [kg・m^2]

エネルギー（２）－５　《慣性モーメントの合成》

質量
m[kg]

$\omega_1 = \dfrac{2\pi N_1}{60}$[rad/s]　　$\omega_2 = \dfrac{2\pi N_2}{60}$[rad/s]



電動機から見た系全体の
慣性モーメント：J [kg・m²]

減速機〜負荷の
慣性モーメント：J_1

電動機〜減速機の
慣性モーメント：J_2

系全体のエネルギー：$W = \dfrac{1}{2}J{\omega_2}^2$ …①

運動エネルギー　$W_L = \dfrac{1}{2}mv^2$

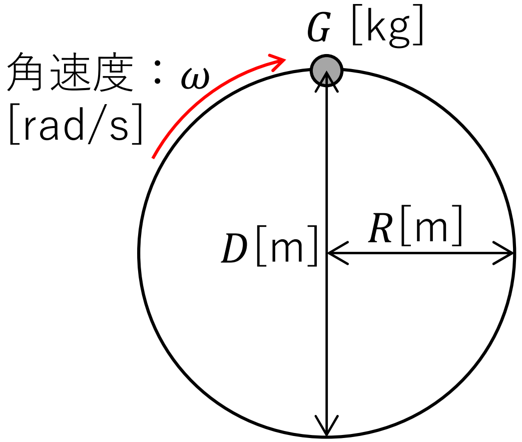
回転エネルギー　$W_1 = \dfrac{1}{2}J_1{\omega_1}^2$

回転エネルギー　$W_2 = \dfrac{1}{2}J_2{\omega_2}^2$

系全体のエネルギー：$W = W_L + W_1 + W_2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}J_1{\omega_1}^2 + \dfrac{1}{2}J_2{\omega_2}^2 \underbrace{= \dfrac{1}{2}J{\omega_2}^2}_{①}$

$$J{\omega_2}^2 = J_1{\omega_1}^2 + J_2{\omega_2}^2 + mv^2 \qquad J = \left(\frac{{\omega_1}^2}{{\omega_2}^2}\right)J_1 + J_2 + \left(\frac{1}{{\omega_2}^2}\right)mv^2 \qquad \therefore\ J = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_1 + J_2 + \left(\frac{30}{\pi N_2}\right)^2 mv^2$$

エネルギー（２）－６　《はずみ車効果》



はずみ車効果[kgf･m^2]：GD^2

重力単位系における慣性モーメントの表現

電動機選定に従来より使用されていた為、SI単位系に統一された現在でも使用されることが多い。

※SI単位系を重力単位系に換算　1[kgf]=g[N]≒9.8[N]

SI単位系

慣性モーメント［kg･m²］: $J = GR^2$

$$GD^2 = G(2R)^2 = 4GR^2 = 4J \quad [\mathrm{kg \cdot m^2}]$$

$$J = \frac{GD^2}{4} \quad [\mathrm{kg \cdot m^2}]$$

トルク[N･m]：$T = J\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{GD^2}{4}\dfrac{d\omega}{dt}$

重力単位系

慣性モーメント［kgf･m²］: $\boldsymbol{J} = \dfrac{GR^2}{g}$　　$GR^2 = g\boldsymbol{J}$

$$GD^2 = G(2R)^2 = 4GR^2 = 4g\boldsymbol{J} \quad [\mathrm{kgf \cdot m^2}]$$

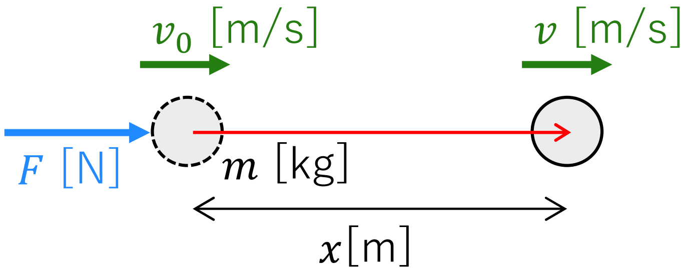
$$\boldsymbol{J} = \frac{GD^2}{4g} \quad [\mathrm{kgf \cdot m^2}]$$

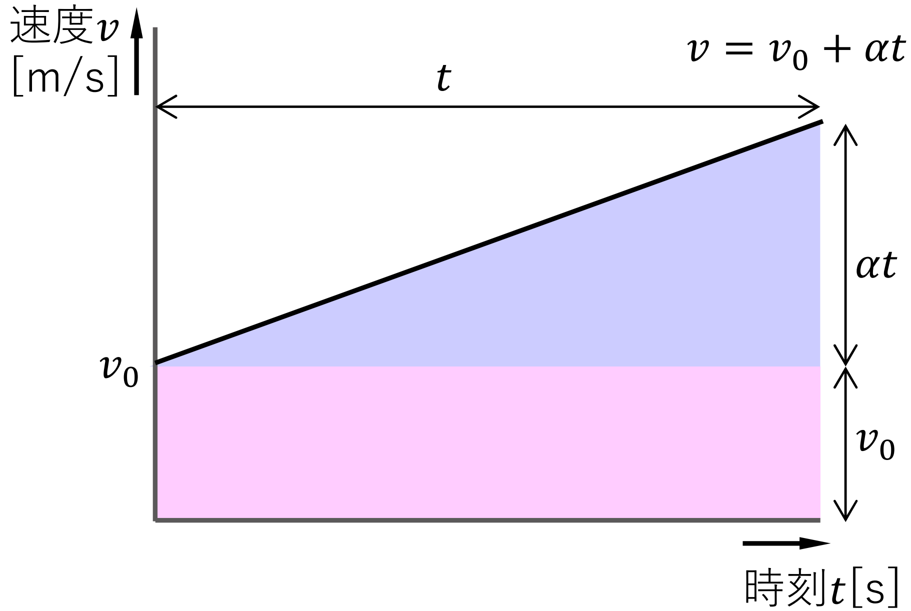
トルク[kgf･m]：$T = \boldsymbol{J}\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{GD^2}{4g}\dfrac{d\omega}{dt}$

エネルギー（２）－１：付録　《等加速度運動より運動エネルギーを導出》

時刻$t=0$[s]で初速v_0[m/s]の物体が、一定の加速度α[m/s^2]で加速している。

t秒後の速度v[m/s]は　$v=v_0+\alpha t$　　$t=\dfrac{v-v_0}{\alpha}$ ・・・①





t秒後までに進んだ距離x[m]は、

速度の積分が距離なので、右グラフより　$x=v_0t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$ ・・・②

②式に①式を代入して、時刻tを含まない式を導くと

$$x=v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2=v_0\left(\frac{v-v_0}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{v-v_0}{\alpha}\right)^2=\frac{1}{2\alpha}\left(2vv_0-2{v_0}^2+v^2-2vv_0+{v_0}^2\right)=\frac{1}{2\alpha}\left(v^2-{v_0}^2\right)$$

$v^2-{v_0}^2=2\alpha x$　　初速v_0がゼロならば、$v^2-0=2\alpha x$　　$\alpha=\dfrac{v^2}{2x}$ ・・・③

仕事の公式に③式を代入すると　　仕事[J]：$W=Fx=m\alpha x=m\dfrac{v^2}{2x}x=\dfrac{1}{2}mv^2$　※運動エネルギー